Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L1-Maths/PMRC
Analyse
Année 2017-2018

Feuille 5 - fonctions, continuité

Rappels : Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en $a \in I$ si $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ t.q. $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

• f est continue en a si pour toute suite (a_n) $(a_n \neq a)$ telle que $a_n \to a$ lorsque $n \to \infty$, on a $f(a_n) \to f(a)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice I : Préciser le domaine et l'image des fonctions suivantes ; dessiner leurs graphes : (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$; (b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; (c) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$; (d) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$; (e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$; (f) $f(x) = x \ln x$; (g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2+3x}{5-2x}}$; (h) $f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$.

Exercice II : Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice III : Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-1}$.
Pour tout $\epsilon > 0$ déterminer δ tel que $(x \neq 1/3$ et $|x| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) + 3| \leqslant \epsilon$.
Que peut-on conclure ?

Exercice IV : Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$\text{a) } f(x) = x \sin \frac{1}{x}; \quad \text{b) } g(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \text{c) } h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}.$$

Exercice V : Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que $\forall x, y \in [a,b],\ |f(x) - f(y)| < |x-y|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a.b]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une solution, et une seule, dans $[a,b]$ (indication : soit $g(x) = f(x) - x$).

Exercice VI : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|\right) .$$

2. On suppose que f et g sont continues sur I. En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction $\sup(f,g)$ est continue sur I.

Exercice VII : Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ croissante, et telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. (Indication : soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$; d'abord, en appliquant le théorème des gendarmes, étudier $\lim_{x\to a^+} f(x)$).

Exercice VIII : Soient f et g continues sur $[0,1]$ telle que $\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) + m < g(x)$. Est-ce-que ce resultat reste vrai si on remplace $[0,1]$ par l'intervalle ouvert $]0,1[$?

Exercice IX : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ paar

$$f(x) = x([2x] - 2[x]) .$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans l'intervalle $[-2,2[$.

2. Déterminer les points de $\mathbb{R}$ où la fonction f est continue.

Exercice X : Soit f une fonction défnie et continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in [0,1]$ tel que

$$f(\alpha_n) = f(\alpha_n + \frac{1}{n}) .$$

(Indication : introduire la fonction ϕ définie sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ par

$$\phi(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$$

et calculer la somme $\phi(0) + \phi(1/n) + \cdots + \phi((n-1)/n)$).