Université de Bretagne Occidentale | L1-Maths/PMRC
Faculté des Sciences et Techniques | Analyse
Département de Mathématiques | *Année 2017-2018*

Feuille 4 - suites numériques 2

Rappels : • Une suite numérique (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \text{ t.q. } n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \epsilon\,;$$

on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

• Une suite numérique (a_n) converge vers $\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ si

$$\forall R > 0 \ \exists n_0 \text{ t.q. } n \geqslant n_0 \Rightarrow a_n > R\,;$$

on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

• Toute suite monotone bornée présente une limite finie.

• Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si la suite (S_N) des ses sommes partielles $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ converge.

• Une valeur d'adhérence d'une suite (a_n) est un nombre A tel que $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ nombre infini des n tel que $|A - a_n| < \epsilon$.

• Pour une suite (a_n), on appelle $\lim\sup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{m\geqslant n} a_m\right) = \inf\limits_{n\geqslant 1}\sup\limits_{m\geqslant n} a_m = \inf\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a_n \text{ pour un nombre fini de } n\}$ - il s'agit de la plus grande valeur d'adhérence de (a_n).

• Pour une suite (a_n), on appelle $\lim\inf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\inf\limits_{m\geqslant n} a_m\right) = \sup\limits_{n\geqslant 1}\inf\limits_{m\geqslant n} a_m = \sup\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a_n \text{ pour un nombre fini de } n\}$ - il s'agit de la plus petite valeur d'adhérence de (a_n).

Exercice I : Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de la suite :

$$\left(\frac{\cos n}{2^n}\right), \quad \left(1 - \frac{n^4}{\exp(n)}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}\right)$$

Exercice II : Etudier dans chacun des cas suivants la convergence de la suite (a_n) ; en cas de convergence calculer la limite :

$$a_n = n^3 + \tfrac{1}{n}, \quad a_n = (-2n+3)\tfrac{n+3}{-n^2+n+6}, \quad a_n = n\sqrt{n} - n, \quad a_n = \tfrac{n}{n+\sqrt{n}}, \quad a_n = \tfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}},$$
$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad a_n = \sqrt{n^2+n} - n, \quad a_n = (2n)^{1/2n},$$

Exercice III : On considère la suite (a_n) avec $a_n = a^n$ pour un nombre réel a.

(i) Montrer que si $|a| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) Montrer que si $a > 1$ alors $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(iii) Que peut-on dire dans les autres cas ?

Exercice IV : Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$ la série géométrique et soit

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^N$$

ses sommes partielles.
(i) Montrer que pour $r \neq 1$

$$S_N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} \, .$$

(ii) En appliquant l'exercice III, étudier les limites $\lim_{N\to\infty} S_N$ dans les différents cas : $|r| < 1$, $r > 1$, $r \leqslant 1$, $r = 1$.

Exercice V : Soit

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

la série harmonique et soit

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{N}$$

ses sommes partielles. Montrer que

$$S_2 > \frac{1}{2}, \quad S_4 > \frac{2}{2}, \quad S_8 > \frac{3}{2}, \ldots, S_{2^k} > \frac{k}{2} \, .$$

En déduire que la sous-suite $(S_{2^k})_k$ tend vers l'infini et par suite que $\lim_{N\to\infty} S_N = \infty$.

Exercice VI : Soit (a_n) et (b_n) deux suites convergentes avec limites finies A et B resp. En appliquant la définition de convergence, démontrer les propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda A \, (\lambda \text{ const.}), \quad \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \, (b_n \neq 0, \forall n)$$

Exercice VII : Calculer $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ dans les cas suivants : (a) $a_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n})$; (b) $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$; (c) $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+2}$; (d) $n \sin(2/n)$; (e) $a_n = \sin m\pi + \cos m\pi$; (f) $a_n = 2(-1)^n + \frac{n}{n+1}$; (g) (plus difficile) $a_n = \sin n$; (h) $a_n = \cos n$.

Exercice VIII : Montrer que l'ensemble de valeurs d'adhérence de la suite $(|\ln n|/n)_{n \geqslant 1}$ est l'intervalle $[0, 1]$.