Université de Bretagne Occidentale
*Faculté des Sciences et Techniques*
Département de Mathématiques

L3-Maths
Intégrale de Lebesgue
*Année 2015-2016*

Feuille 6 - Intégrales dépendant d'un paramètre

**Exercice I :** On pose

$$F(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\, dx\ .$$

1) Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée $F'$.

**Exercice II :** On pose

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, dt\ .$$

Montrer que $\Gamma$ est définie et convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice III :** Montrer que la fonction

$$t \longmapsto F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{e}^{-tx}\, dx$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout réel $t > 0$, on ait $F(t) = C - \arctan(t)$.

En considérant la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $C = \frac{\pi}{2}$.

Après avoir effectué une intégration par parties, montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx\ .$$

**Exercice IV :** Le but de cet exercice est de prouver que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

On considère, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) := \Big(\int_0^x e^{-t^2} dt\Big)^2 \quad \text{et} \quad G(x) := \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt\ .$$

1) Montrer que $F$ et $G$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer leur dérivée.
2) En déduire la valeur de $(F+G)(x)$ pour tout réel $x$.
3) Par des majorations simples, montrer que $\lim_{x\to +\infty} G(x) = 0$ .
4) Conclure.

**Exercice V :** On considère la fonction

$$t \longmapsto F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2} dx \ .$$

1) Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Expliciter $F'$ et en déduire $F$.

**Exercice VI :** On se propose de calculer

$$f(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(ax)\, dx, \quad a \in \mathbb{R} \ .$$

1) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter $f'$.
2) Montrer que $f$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre.
3) En déduire la valeur de $f(a)$, $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice VII :** *(Sur l'équation de la chaleur)*

Dans la suite, on pose, pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et pour $g$ fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$,

$$K(x,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2t} \quad \text{et} \quad f(x,t) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, K(x-y,t)\, \mathrm{d}y \ .$$

1) Montrer que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ existent et que l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \ .$$

2) Déterminer la limite

$$\lim_{t\to 0^+} f(0,t) \ ,$$

puis, pour tout réel $x$, la limite

$$\lim_{t\to 0^+} f(x,t) \ .$$