Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L3-Maths
Intégrale de Lebesgue
Année 2015-2016

Feuille 5 - Intégrale de Lebesgue

Exercice I : Soient X un ensemble et a un élément de X. On note δ_a la mesure de Dirac en a sur $(X, \mathcal{P}(X))$. On rappelle que, pour toute partie A de X,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1) Quelles sont les applications $f : X \to \mathbb{R}$ qui sont mesurables ?

2) Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$. Montrer l'égalité

$$\int_X f \, \mathrm{d}\delta_a = f(a)$$

dans chacun des cas suivants :

(i) Lorsque f est l'indicatrice d'une partie de X.

(ii) Lorsque f est une fonction simple positive.

(iii) Lorsque f est une fonction positive.

(iv) Lorsque f est une fonction intégrable. (On commencera par préciser quelles sont les fonctions intégrables.)

Exercice II : On considère $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ muni de la mesure de comptage μ.

On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n := \frac{1}{n}\mathbb{I}_{\{1,2,\dots,n\}}$.

Vérifier que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{N}^*$. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{N}^*} f_n d\mu$?

Exercice III : Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $g : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable.

1) Montrer que l'on définit une nouvelle mesure ν sur $(X, \mathcal{T})$ en posant :

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu \,, \quad \text{pour tout } A \text{ dans } \mathcal{T} \,.$$

2) Montrer que f est élément de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{T}, \nu)$ si, et seulement si, fg est dans $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ et que, dans ce cas,

$$\int_X f \, d\nu = \int_X fg \, d\mu \,.$$

Exercice IV : Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $T : X \to Y$ une application mesurable.

On définit ν sur $\mathcal{B}$ en posant : $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ pour tout B dans $\mathcal{B}$.

1) Montrer que ν est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$.

La mesure ν ainsi définie est appelée mesure image de μ par T et est notée dans la suite μ_T.

2) Montrer qu'une fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ est intégrable pour μ_T si, et seulement si, $f \circ T$ est intégrable pour μ et que, dans ce cas, on a :

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu_T = \int_X f \circ T \, \mathrm{d}\mu \, .$$

(On pourra commencer par vérifier cette égalité pour les indicatrices de parties mesurables, ...)

Exercice V : Soit $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions continues telle que

$$\forall x \in [0,1] \, , \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \, .$$

Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = 0 \, .$$

Exercice VI : Etudier l'intégrabilité au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{x + x^3}{\sqrt{x} + x^5} \, \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \, ; \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{x(1+x)} \, \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \, ; \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^{3/2}\,(1+x)} \, \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \, ;$$

$$x \longmapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \, \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \, ; \quad x \longmapsto \frac{e^{-x^2}}{x} \, \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \, ; x \longmapsto \frac{e^{-x^{1/3}}}{\sqrt{x}} \, \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \, ;$$

$$x \mapsto \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x) - \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \, ; \quad x \mapsto x \mathbb{1}_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}(x) \, ; \quad x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\frac{n^2 x^2}{2}) \, \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \, .$$

Exercice VII : Construire une fonction f continue, positive et Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty \, ; \, n \in \mathbb{N}} f(n) = +\infty \, .$$

Exercice VIII : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+x} \, dx \, ; \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x^n \cos(nx) \, dx \, .$$

Exercice IX :

1) Donner un exemple d'une suite décroissante de fonctions mesurables positives $(f_n)_{n\,\geqslant\,0}$ définies sur un espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu \neq \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n\,d\mu\ .$$

2) Montrer que si $(f_n)_{n\,\geqslant\,0}$ est une suite décroissante de fonctions mesurables positives définies sur un espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$ et si f_1 est intégrable alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu\ .$$

avec $f=\lim_{n\to+\infty} f_n$.

Exercice X : Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Montrer que si f est élément de $\mathrm{L}^1(X)$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|\,\geqslant\,n\}}\,d\mu = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n\,\mu(\{|f|\ \geqslant n\}) = 0\ .$$

Exercice XI : Montrer que les limites suivantes existent et les calculer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+n\tan x}\,dx\ ;\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (\mathrm{e}^x\cos(x))^{1/n}\,dx\ ;\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}(\sin x)^n\mathrm{e}^{-x}dx\ ;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}dx\ ;\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}dx\ ;\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{nx}dx\ .$$

Exercice XII : En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z\ .$$

Exercice XIII : En utilisant le théorème de convergence monotone, montrer que

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\ .$$

Exercice XIV : Montrer que les fonctions

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-n^2x}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$$

sont bien définies sur $\mathbb{R}$, mesurables et discuter leur intégrabilité.

Exercice XV : Montrer les égalités

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{4}{3}\ ; \quad \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(2n+1)}\ ;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\ ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}\ .$$

Exercice XVI : Soit $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge p.p. vers une fonction f et s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \geqslant 1\ , \quad \int_{\mathbb{R}} |f_n|\,d\mu \leqslant C$$

alors f appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

2) Montrer que la suite $(f_n = n\,\mathbb{1}_{]0,1/n]})_{n \geqslant 1}$ converge p.p. vers une fonction f (que l'on déterminera), qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \geqslant 1\ , \quad \int_{\mathbb{R}} |f_n|\,d\mu \leqslant C$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu \neq \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu\ .$$

3) Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui converge p.p. vers une fonction f. Montrer que si les fonctions f_n et f sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n|\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} |f|\,d\mu$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f|\,d\mu = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu\ .$$

(Indic : on pourra considérer la suite de fonctions $h_n := |f_n| + |f| - |f_n - f|$, $n \geqslant 1$.)

Exercice XVII : On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$f_n(x) = -n\,\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}\ .$$

Montrer que (f_n) converge p.p. vers une fonction f intégrable (que l'on déterminera). Peut-on appliquer le lemme de Fatou ?