Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L3-Maths
Intégrale de Lebesgue
Année 2015-2016

Feuille 4 - Fonctions mesurables

Exercice I :

1) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction constante. Montrer que f est mesurable.

2) Que peut-on dire d'une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ relativement à la tribu triviale sur X ?

3) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur une partie A de X pour que son indicatrice soit mesurable.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable.

5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable.

Exercice II : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1) Montrer que $|f|$ est mesurable.

2) Construire un exemple simple montrant que la réciproque de la question précédente est fausse.

Exercice III : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que sa dérivée $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable. *(Indic : on pourra écrire f' comme la limite simple d'une suite de fonctions mesurables.)*

Exercice IV : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

1) Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et a un nombre réel. Montrer que les ensembles $[f \leqslant a]$ et $[f < g]$ sont mesurables.

2) Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 0$, une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble

$$E := \{x \in X \ : \ (f_n(x))_{n \geqslant 0} \text{ converge dans } \mathbb{R}\}$$

est mesurable.

Exercice V : Soient X un ensemble et E une partie de X. On pose :

$$\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{P}(X) \ : \ A \subset E \text{ ou } A^c \subset E\} \ .$$

1) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X.

2) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application. On munit X de la tribu $\mathcal{T}$.

Montrer que f est mesurable si, et seulement si, f est constante sur E^c.

Exercice VI : Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des sous-ensembles A de $\mathbb{Z}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \quad 2n \in A \Leftrightarrow 2n+1 \in A .$$

a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$.

b) On considère à présent l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par : $\varphi(n) = n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Montrer que φ est une bijection, qu'elle est mesurable lorsque $\mathbb{Z}$ est muni de la tribu $\mathcal{T}$, mais que son inverse φ^{-1} ne l'est pas. *(Indic : on pourra considérer l'image réciproque du singleton* $\{0\}$*.)*

Exercice VII : Soit f une fonction mesurable définie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } n < f(x) \\ f(x) & \text{si } -n \leqslant f(x) \leqslant n \\ -n & \text{si } f(x) < -n \end{cases} .$$

Montrer que, pour chaque entier n, f_n est une application mesurable et que, pour tout $x \in X$,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) .$$

Exercice VIII : En utilisant la mesurabilité d'une fonction bien choisie, vérifier que si x est élément de $\mathbb{R}$ et si B appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors $x + B$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice IX :

1. Montrer que $x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{x}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \in \mathbb{R}$ est mesurable.

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I. Montrer que $f\, \mathbb{I}_I$ est mesurable.

A présent, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite mesurable lorsqu'elle est mesurable relativement à la tribu de Lebesgue* $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ *pour son ensemble de départ et à celle de Borel* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *pour son ensemble d'arrivée. De plus,* λ *désigne la mesure de Lebesgue sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.

Exercice X : Soit A l'ensemble des irrationnels de $[0, 1]$.

Déterminer $\lambda(A)$ et montrer que A est d'intérieur vide.

Exercice XI : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1) Montrer que si f est égale presque partout à une fonction mesurable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors f est mesurable.

2) Montrer que si f est continue et nulle presque partout alors f est nulle partout.

3) Montrer que si f est une fonction continue presque partout alors f est mesurable.