Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L3-Maths
Intégrale de Lebesgue
Année 2015-2016

Feuille 11 - Transformée de Fourier

Rappels : La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est unhe opération qui tranforme une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ en

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

Quelques propriétés :

$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}, \quad \mathcal{F}(fg) = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}, \quad \mathcal{F}(f'(x)) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi), \quad \mathcal{F}(xf(x)) = \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}(f)'(\xi)$$

Exercice I : Soit $a > 0$ et f la fonction définie par $f(x) = e^{-ax}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f. Soit g la fonction définie par $g(x) = e^{ax}\mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x)$. Calculer la transformée de Fourier $\hat{g}$ de g. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 u^2} du\,.$$

Exercice II : Soit f la fonction définie par $f(x) = x\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Calculer la tranformée de Fourier de f.

Exercice III : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

a. Faire la représentation graphique de f.

b. Calculer la transformée de Fourier de f.

c. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4} dx\,.$

Exercice IV : Soient $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^k}{k!}e^{-ax}$. En utilisant le résultat de l'exercice I, calculer $\hat{f}$.

Exercice V : Soit g la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 2+x & \text{si} \quad x \in [-2,-1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ 2-x & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geqslant 2 \end{cases}$$

a. Faire la représentation graphique de f.

b. Exprimer g en fonction de la fonction f de l'exercice III.

c. A l'aide de la transformée de Fourier de f, calculer la transformée de Fourier de g.

Exercice VI : A l'aide de la transformée de Fourier de la fonction $\mathbb{1}_{[-1,1]}$, calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

Exercice VII : Soit $a > 0$ et f la fonction d'efinie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-a|x|}$.

a. On considère une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est intégrable et paire. Montrer que

$$\hat{g}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} g(x) \cos(\xi x) dx \,.$$

b. En déduire la transformée de Fourier de f, puis celle de $x \mapsto 1/(1 + x^2)$.

c. Retrouver la transformée de Fourier de f en utilisant les résultats de l'exercice I.

d. En déduire, pour $\omega \in \mathbb{R}$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1 + x^2} dx \,.$

Exercice VIII : Soient $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax^2}$.

a. Montrer que f est solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2axy(x) = 0 \,.$$

b. En appliquant la transformée de Fourier à cette équation différentielle, en déduire une équation différentielle vérifiée par $\hat{f}$.

c. Sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, calculer $\hat{f}(0)$. En déduire que

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 \xi^2 / a} \,.$$