Sous-groupes compacts de $\mathbf{GL}(\mathbb{R}^d)$

Théorème 1. *Tout sous-groupe compact* $\mathbf{G}$ *de* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$ *est conjugué à un sous groupe d'isométries euclidiennes de* $\mathbb{R}^d$.

La démonstration donnée ici repose sur un lemme de point fixe.

Lemme 2. *Soit* $n \geqslant 1$ *et* $\mathcal{G}$ *un sous-groupe compact de* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. *Tout convexe non vide* C *de* $\mathbb{R}^n$ *d'intérieur non vide et stable par* $\mathcal{G}$, *contient un point fixé par tous les éléments de* $\mathcal{G}$.

• Supposons un instant le lemme démontré et désignons par $\mathcal{S}_d$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^d$ symétriques, et $\mathcal{S}_d^{>0}$ ceux d'entre eux qui sont définis positifs. L'application de $\mathbf{G}$ dans $\mathrm{GL}(\mathcal{S}_d)$ définie par la relation

$$\mathbf{g} \mapsto \{S \mapsto \mathbf{g}^t S \mathbf{g}\}$$

étant un morphisme de groupe continu, son image $\mathcal{G}$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathcal{S}_d)$. L'ouvert convexe $\mathcal{S}_d^{>0}$ étant stable par l'action de $\mathbf{G}$ (voyez-vous pourquoi ?), le lemme nous assure l'existence d'un endomorphisme symétrique défini positif h_0 fixé par tous les éléments de $\mathbf{G}$, c'est-à-dire vérifiant $\mathbf{g}^t h_0 \mathbf{g} = h_0$, pour tous $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$. Si h_1 désigne la racine carrée de $h_0 = h_1^2 = h_1^t h_1$, l'identité précédente se ré-écrit $\big(h_1 \mathbf{g} h_1^{-1}\big)^t \big(h_1 \mathbf{g} h_1^{-1}\big) = \mathrm{Id}$, pour tous $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$, ce qui signifie bien que le groupe $h_1 \mathbf{G} h_1^{-1}$ est formé d'isométrie euclidiennes.

• Il nous reste à démontrer le lemme. L'intérieur de C étant non vide, désignons par $a_0, \dots, a_n$ des points de C formant un repère affine de $\mathbb{R}^n$. L'application $g \in \mathcal{G} \mapsto g(a) \in \mathbb{R}^n$ étant continue quel que soit $a \in \mathbb{R}^n$, chaque trajectoire $\mathcal{G}(a)$ est compacte, et l'ensemble $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{G}(a_i)$ est compact et inclus dans C, puisque ce dernier est stable par l'action de $\mathcal{G}$. Comme C est convexe, l'enveloppe convexe $\widetilde{C}$ du compact $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{G}(a_i)$ est incluse dans C, et compacte. L'ensemble $\widetilde{C}$ est par ailleurs $\mathcal{G}$-stable puisque c'est l'ensemble des barycentres d'un ensemble $\mathcal{G}$-stable et que les applications $g \in \mathcal{G}$ sont linéaires.

Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Comme $\widetilde{C}$ contient l'enveloppe convexe de $\{a_0, \dots, a_n\}$, il est d'intérieur non vide, et donc de mesure de Lebesgue strictement positive. Notons

$$y = \frac{1}{\lambda(\widetilde{C})} \int_{\widetilde{C}} x \lambda(dx)$$

le centre de gravité de $\widetilde{C}$ – l'intégrale est bien définie puisque $\widetilde{C}$ est compact. On utilise, pour justifier le fait intuitif que $y \in \widetilde{C}$, la caractérisation des convexes fermés comme intersection des demi-espaces fermés qui les contiennent. Pour toute forme affine ζ vérifiant $\widetilde{C} \subset \zeta^{-1}(\mathbb{R}^+)$, on a

$$\zeta(y) = \frac{1}{\lambda(\widetilde{C})} \int_{\widetilde{C}} \zeta(x) \lambda(dx) \geqslant 0$$

comme l'intégrand est positif sur $\widetilde{C}$; cela nous assure que $y \in \widetilde{C}$. Si l'on remarque alors que la compacité de $\mathcal{G}$ et le fait que l'application déterminant est un morphisme de groupe de $\big(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^d), \circ\big)$ vers $\big(\mathbb{R}^*, \times\big)$, forcent $\text{dét}\,\mathcal{G}$ à être inclus dans le seul sous-groupe compact $\{\pm 1\}$ de $\big(\mathbb{R}^*, \times\big)$, le théorème de changement de variable rend licite les manipulations suivantes, faites pour un élément g de $\mathcal{G}$ quelconque,

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{\lambda(\widetilde{C})} \int_{\widetilde{C}} g(x)\lambda(dx) = \frac{1}{\lambda(\widetilde{C})} \int_{\widetilde{C}} g(x)\big|\text{dét}\, g\big|\lambda(dx) \\ &= \frac{1}{\lambda(\widetilde{C})} \int_{\widetilde{C}} z\lambda(dz) = y, \end{aligned}$$

la troisième égalité étant conséquence de l'invariant de $\widetilde{C}$ par l'action de g. Le point y est l'élément de C recherché.