1 Les idées de Green

C'est en 1828 dans son "*Essay on the applications of analysis to the theory of electricity and magnetism*" que Green utilise l'identité qui portera désormais son nom :

$$\int_D (u\triangle v - v\triangle u)dm = \int_{\partial D}(u\partial_n v - v\partial_n u)d\sigma,$$

où D est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ de bord ∂D, $\partial_n f$ la dérivée normale d'une fonction f et σ la mesure surfacique [1]. Appliquons cette formule à une fonction harmonique v et au potentiel électrostatique (ou gravitationnel) crée en y par une charge (une masse) placée en un point x de D [2] : $y \mapsto g_x(y) := g(x,y) := \frac{1}{|x-y|}$, qui est harmonique dans tout ouvert ne contenant pas la singularité x. Utilisons donc cette formule, non pas sur D mais sur le complémentaire dans D d'une petite boule $B(x,r)$ contenue dans D, sur lequel v et g_x sont toutes deux harmoniques :

$$0 = \int_{\partial D}(g_x\partial_n v - v\partial_n g_x)d\sigma + \int_{S(x,r)}(\frac{1}{r}\partial_n v - \frac{v}{r^2})d\sigma \tag{1.0.1}$$

La seconde intégrale s'évalue à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires par : $(\frac{1}{r}\partial_n v(y') - \frac{v(y'')}{r^2})4\pi r^2$, pour y' et y'' dans $S(x,r)$. v étant harmonique sur D, $\partial_n v(y')$ est bornée et $v(y'') \to v(x)$, lorsque r tend vers 0 ; de ce fait l'égalité (1.0.1) donne l'identité :

$$-4\pi v(x) = \int_{\partial D}(v\partial_n g_x - g_x\partial_n v)d\sigma,$$

valable pour tout $x \in D$. On connaît donc v à l'intérieur de D si on connaît sa restriction au bord de D, ainsi que sa dérivée normale. On peut se débarrasser de cette dérivée normale par l'habile manipulation qui suit.

Pour toute fonction h_x, harmonique sur D, la formule de Green nous fournit l'égalité : $0 = \int_{\partial D}(v\partial_n h_x - h_x\partial_n v)d\sigma$; lui soustrayant la précédente, on obtient :

$$4\pi v(x) = \int_{\partial D}(\partial_n(h_x - g_x)v - (h_x - g_x)\partial_n v)d\sigma$$

[1] Qu'il faille que D soit régulier pour que la formule soit valide ne préoccupa pas beaucoup Green...

[2] A une constante près.

Si donc on trouve une fonction h_x harmonique sur D, valant g_x sur le bord de D, on aura décrit $v(x)$ à l'aide des seules valeurs de v sur ∂D :

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \partial_n (h_x - g_x) v d\sigma.$$

Trouver une telle fonction h_x est l'objet du ***problème de Dirichlet***. Pour Green, il n'y avait pas de problème ! h_x est le potentiel crée en x par une distribitution uniforme de charge sur ∂D. Si éclairante que soit cette intuition, on va voir qu'une telle fonction n'existe pas toujours...

2 Probabilités et potentiel

2.1 Le mouvement brownien

Il s'agira pour nous d'une fonction aléatoire allant de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^3$, qu'on notera $X(\omega) = \{X_t(\omega)\}_{t\geq 0}$, et qui vérifie les deux conditions suivantes [3] :

$$\begin{cases} X_0 \text{ est presque sûrement nulle ;} \\ \text{pour tous } 0 < t_1 < ... < t_n, \text{ les } \textit{variables aléatoires } X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{ sont des gaussiennes centrées, de variance } t_1,\ t_2 - t_1, \text{ etc.} \end{cases}$$

Ainsi, une quantité du type $\mathbb{E}[f(X_t)]$ vaut $\int p_t(0,y) f(y) dy$, où $p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{|x-y|^2}{2t}}$ est la densité d'une loi normale de moyenne x et de variance t.

Que l'on puisse mettre sur un $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$ une telle probabilité n'a absolument rien d'évident [4] !

Pour mettre en avant le fait que X est à valeurs dans un espace de fonctions on parlera de X comme d'un *processus* [5] et non pas comme d'une

[3] Chaque $X(\omega)$ est donc une fonction continue dont on note $X_t(\omega)$ la valeur au temps t (cette fonction de ω étant mesurable) ; X est donc une collection $\{X_t\}_{t\geq 0}$ de variables aléatoires indexées par le temps et qui se comportent bien les une vis-à-vis des autres.

[4] C'est à Wiener qu'on doit la première construction du mouvement brownien ; elle date d'environ 1924. On en trouve une magnifique construction dans l'esprit de l'originale dans *Diffusions, Markov processes and martingales*, de D. Williams, dont je ne saurais assez recommander la lecture.

[5] C'est le terme consacré.

variable aléatoire, terme réservé aux évaluations de X en des temps précis : les X_t.

Si l'on veut que notre mouvement brownien soit issu non pas de 0 mais d'un point x quelconque, on considèrera le processus $x + X$, dont on notera $\mathbb{P}_x$ la loi et $\mathbb{E}_x$ l'espérance associée ; les $\mathbb{E}_x[f(X_t)]$ seront alors égales à $\int p_t(x, y) f(y) dy$, *quantitá importantissime* pour la suite, descriptions partielles du processus via son observation aux temps t.

Une fois un processus donné, on peut construire de nouvelles variables aléatoires... Par exemple, on pourra considérer, pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^{+\infty} f(X_t(\omega))dt.$$

Mais attention ! Rien ne nous dit que cela définit bien une fonction de ω qui soit mesurable [6] ; c'est heureusement le cas pourvu lorsque f est sympathique (continue à support compact, par exemple). Si f est l'indicatrice d'une partie A [7], cette variable aléatoire représente le temps passé par la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ dans A, ou, si l'on préfère, le temps passé dans A par la "particule" qui suit une trajectoire brownienne décrite par la fonction précédente.

Calculons le temps moyen passé par une "particule brownienne" dans A :

$$\mathbb{E}_x[\int_0^{+\infty} f(X_t)dt] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_x[f(X_t)]dt. \tag{2.1.1}$$

2.2 L'opérateur potentiel

Il est temps maintenant de mettre sur le devant de la scène l'extraordinaire égalité suivante, qui relie la densité $p_t(x, y)$ de la loi au temps t d'un brownien issu de x et le potentiel créé au point y par une charge placée en x :

$$\int_0^{+\infty} p_t(x, y)dt = \frac{1}{2\pi|x-y|}.$$

Si l'on associe à une fonction f continue, à support compact, le potentiel $U^f(m)$, en un point m, associé à la répartition de charge f, $U^f(m) = \int \frac{f(\xi)}{|m-\xi|} d\xi$, on observe que

[6] relativement aux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$.

[7] un borélien évidemment, ce qu'on supposera sans le dire toutes les fois que nécessaire.

$$U^f(m) = \int (2\pi \int_0^{+\infty} p_t(x,y)f(y)dt)dy = 2\pi \int_0^{+\infty} (\int p_t(x,y)f(y)dy)dt$$
$$= 2\pi \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_x[f(X_t)]dt \qquad (2.2.1)$$

c'est exactement la quantité (2.1.1), au terme parasite 2π près ! Avec pour f l'indicatrice de A, cela se réinterprète en disant que *le temps moyen passé par un mouvement brownien issu de x dans un borélien A est* [8] *le potentiel créé en x par une répartition de charge uniforme sur A.*

3 Temps aléatoires

A la vue de la définition du mouvement brownien donnée ci-dessus, on pourrait croire que l'étude d'un tel processus se résume à l'étude des lois finies dimensionnelles, *i.e.* des quantités $\mathbb{E}[f(X_t)]$. Il n'en est rien ! Un processus stochastique est bien plus que cela, notamment du fait de l'existence de temps aléatoires liés à X et que les $\mathbb{E}[f(X_t)]$ sont incapables de décrire.

Le plus important pour nous sera le ***temps de sortie d'une partie*** $B \in \mathbb{R}^3$:

$$S_B(\omega) := \inf\{0 < t < \infty; X_t(\omega) \in B^c\}$$

Qu'on définisse ainsi une fonction mesurable de ω n'a rien d'évident, c'est cependant le cas si B est un borélien. *B sera pour nous un ouvert borné.*

Si le temps en soi nous intéresse, c'est surtout la position au temps de sortie qui va nous importer. Cette position (aléatoire) est décrite de façon probabiliste par les quantités : $\mathbb{P}_x(X_{S_B} \in C)$, C borélien. Du fait de la continuité du mouvement brownien, on peut déjà dire que si $x \in \overline{B}$, X_{S_B} appartient presque sûrement à ∂B ; de plus, si $x \notin \overline{B}$, S_B est presque sûrement égal à 0 et X_{S_B} égal à x.

Les $\{\mathbb{P}_x(X_{S_B} \in C)\}_C$ définissent une *mesure* [9] sur ∂B tantôt appelée mesure de sortie associée à x, tantôt ***mesure harmonique associée à*** x. On la note $H_B(x,.)$; vue comme forme linéaire sur les fonctions continues

[8] Au 2π près.

[9] il n'y a aucune raison a priori pour que cette *mesure* soit une probabilité.

sur ∂B, elle est définie par : $H_B f(x) := \mathbb{E}_x[f(X_{S_B})]$; cette fonction de x est mesurable [10], elle jouit même d'une propriété beaucoup plus forte :

Proposition 3.1. *$H_B f$ est harmonique* [11] *sur B.*

$\lhd$ On va montrer que $H_B f$ possède la propriété de la moyenne, ce qui suffit à assurer l'harmonicité [12].

Soit x un point de B et $B(x,r)$ une boule centrée en x, de rayon r, incluse dans B. Enonçons d'abord deux faits généraux sur le mouvement brownien avant d'en venir au coeur de la démonstration.

(a) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}|X_t| = +\infty$, presque sûrement ; de ce fait (presque) toute trajectoire (issue de x) rencontre $B(x,r)$, $H_{B(x,r)}(x,.)$ est donc une probabilité sur la shère $S(x,r)$;

(b) quelle que soit la rotation Φ de centre x, les processus X et $\Phi(X)$ ont même loi [13] ; de ce fait, la mesure de sortie $H_{B(x,r)}(x,.)$ doit être invariante par rotation, c'est donc la probabilité uniforme sur $S(x,r)$, notée σ.

Rappelons aussi que lorsqu'on conditionne une variable aléatoire U par une autre variable aléatoire V, on obtient une "fonction" de V, qu'on note $\mathbb{E}[U|V]$, et que si ν désigne la loi image de V, alors on a :

$$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U|V]] = \int \mathbb{E}[U|V](v)d\nu(v)$$

Si par exemple $U = f(X_{S_B})$ et $V = X_{S_{B(x,r)}}$, $\mathbb{E}[U|V](v) = \mathbb{E}_v[f(X_{S_B})]$.

Ces remarques faites, et puisque X passe par $B(x,r)$ avant de toucher le bord de B, on va calculer $\mathbb{E}_x[f(X_{S_B})]$ en conditionnant par rapport à la position de X au temps où il sort de $B(x,r)$:

$$\begin{aligned} H_B f(x) &= \mathbb{E}_x[f(X_{S_B})] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[f(X_{S_B})|X_{S_{B(x,r)}}]] \\ &= \int \mathbb{E}_y[f(X_{S_B})]d\sigma(y) = \int H_B f(y)d\sigma(y), \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

$H_B f$ a donc la propriété de la moyenne ; étant intégrable, puisque bornée, elle est harmonique. $\rhd$

[10] C'est un fait non immédiat.

[11] Une fonction $g : D \to \mathbb{R}^3$ est harmonique si et seulement si pour tout x de D et tout $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset D$, $g(x) = \int_{B(x,r)} g(y)dy$; il suffit que $g(x) = \int_{S(x,r)} g(y)d\sigma(y)$ (σ la mesure surfacique sur la sphère) pour que la condition précédente soit remplie.

[12] Voir par exemple M. Rao.

[13] Cela provient de ce que les variables X_t ont elles même des lois invariantes par rotation.

4 Le problème au bord

4.1 Points réguliers

Rappelons qu'on est à la recherche d'une fonction continue sur $\overline{B}$, harmonique sur B, et dont la restriction à ∂B est fixée (au paragraphe 1, il s'agit de g_x). Cette recherche peut être vaine : si $B = B(0,1)\backslash\{0\}$, les seules solutions sur B à l'équation $\triangle g = 0$ sont de la forme $\alpha \ln|x| + \beta$, qui soit tendent vers ∞ en 0, soit sont constantes...

Ainsi, non seulement la valeur au bord de la fonction recherchée a de l'importance, mais c'est surtout la "forme" de B qui décide de l'existence ou non de solutions au problème de Dirichlet.

On va ici donne une condition sur la forme de B au voisinage d'un point $z \in \partial B$ pour que la fonction harmonique $H_B f$ construite au paragraphe précédent soit continue en z, *i.e.* $\lim\limits_{x \to z, x \in B} H_B f(x) = f(z)$.

On dit d'un ***point*** $z \in \partial B$ qu'il est ***régulier*** si un brownien issu de z quitte (presque sûrement) immédiatement B :

$$\mathbb{E}[S_B] = 0$$

Il est dit ***irrégulier*** sinon.

Dans l'exemple précédent, le point 0 est irrégulier. un principe général permet de dire que $z \in \partial B$ est irrégulier si et seulement si $\mathbb{P}(S_B > 0) = 1$ (c'est ce 1 qui peut surprendre).

Nous sommes prêts pour énoncer le

Théorème 4.1. *Soit B un ouvert borné et $f : \partial B \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. Si $z \in \partial B$ est régulier et f continue en z alors $H_B f$ est continue en z :*

$$\lim_{x \to z, x \in B} H_B f(x) = f(z)$$

La démonstration repose essentiellement sur le fait suivant.

Lemme 4.2. *L'application $x \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{E}_x[S_B]$ est semi-continue supérieurement.*

$\lhd$ Rappelons que ces fonctions sont les limites simples, décroissantes, de fonctions continues et qu'elles sont caractérisées par l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \overline{\lim_{y \to x}} f(y) \leq f(x)$$

Commençons par nous assurer de l'intégrabilité de S_B. Si $B \subset B(0,R)$, S_B est majoré par le temps d'atteinte des niveaux $\pm R$ de sa premièrecoordonnée (qui est un brownien réel), lequel temps est intégrable ; pour la même raison, $S_B^\varepsilon := \inf\{\varepsilon < t; X_t \in B^c\}$ est intégrable. S_B^ε décroissant vers S_B lorsque ε décroit vers 0, le théorème de convergence monotone nous donne $\mathbb{E}_x[S_B] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \searrow \mathbb{E}_x[S_B^\varepsilon]$. Mais $\mathbb{E}_x[S_B^\varepsilon] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_\varepsilon}[S_B]]$ étant de la forme $\mathbb{E}_x[g(X_\varepsilon)]$, où $g(x) := \mathbb{E}_x[S_B]$ est bornée (*on le montrera à la fin*), $\mathbb{E}_x[S_B^\varepsilon]$ est une fonction continue de x. Ainsi,

$$\overline{\lim_{y\to x}} \mathbb{E}_y[S_B] \leq \overline{\lim_{y\to x}} \mathbb{E}_y[S_B^\varepsilon] = \lim \mathbb{E}_y[S_B^\varepsilon] = \mathbb{E}_x[S_B^\varepsilon]$$

Il reste à faire tendre ε vers 0 pour conclure. $\rhd$

On n'aura maintenant aucun mal à démontrer le théorème.

$\lhd$ Soit $z \in \partial B$ un point régulier ; au vu du lemme, on doit avoir

$$\mathbb{E}_x[S_B] \underset{x\to z, x\in B}{\longrightarrow} 0.$$

Ecrivons le brownien issu de x sous la forme $x+X$ où X est un brownien issu de 0. $S(x) := S_B = \inf\{t > 0; x + X_t \in B^c\}$. La convergence précédente se réécrivant : $\mathbb{E}[S(x)] \underset{x\to z, x\in B}{\longrightarrow} 0$, cela signifie que $S(x)$ tend vers 0 dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{P}_0)$. On peut donc extraire de toute suite $\{x_n\}_{n\geq 0}$ tendant vers z une sous-suite $\{\widetilde{x}_n\}_{n\geq 0}$ telle que $\{S_{\widetilde{x}_n}\}_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers 0 ; la continuité de X nous assure alors que $\widetilde{x}_n + X_{S_{\widetilde{x}_n}}$ converge presque sûrement vers $z + X_0 = z$. Par conséquent, si f est bornée sur ∂B, continue en z le théorème de convergence dominée justifie que

$$\mathbb{E}[f(\widetilde{x}_n + X_{\widetilde{x}_n})] \to f(z),$$

c'est-à-dire

$$H_B f(\widetilde{x}_n + X_{\widetilde{x}_n}) \to f(z).$$

$H_B f(x)$ n'a donc qu'une valeur d'adhérence lorsque x tend vers z : elle est continue en z. $\rhd$

4.2 Où l'on retrouve deux critères classiques

a) Le cone

Proposition 4.3. *Soit z un point du bord de B. S'il existe dans B^c un cone de sommet z alors z est régulier.*

$\lhd$ Notons C_z le cone de sommet z de l'énoncé. Il s'agit de montrer que $\mathbb{P}_z(S_B = 0) = 1$; il nous suffit en fait de voir que $\mathbb{P}_z(S_B = 0) > 0$, la *loi du* $0-1$ nous assurant alors que cette probabilité vaut 1.

Notons T le temps de sortie de $B(z,r)$ et σ_r la probabilité uniforme sur $S(z,r)$.

$$\mathbb{P}_z(X_T \notin B) = \sigma_r(B^c \cap S(z,r)) \geq \sigma_r(C_z \cap S(z,r));$$

ce minorant est une constante $c > 0$ indépendante de r. S_B étant inférieur à T sur l'évènement $\{X_T \notin B\}$, $\mathbb{P}_z(S_B \leq T) \geq \mathbb{P}_z(X_T \notin B) \geq c$. Il reste à faire tendre r vers 0 pour avoir : $\mathbb{P}_z(S_B = 0) \geq c$. $\rhd$

b) Les barrières

Une ***barrière en un point*** $z \in \partial B$ est une fonction > 0 et surharmonique dans un voisinage de z *dans* B et telle que $\lim\limits_{x \to z, x \in B} f(x) = 0$.

Proposition 4.4. *S'il existe une barrière en z alors a est régulier.*

$\lhd$ Si tel n'était pas le cas, $\mathbb{P}_z(S_B > t)$ serait > 0 pour un temps t assez petit. On aurait alors pour $s < t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_z[f(X_{S_B})\mathbf{1}_{t<S_B}] &= \mathbb{E}_z[f(X_{s+t-s})\mathbf{1}_{s-S_B}\mathbf{1}_{t-s<T\circ\theta_s}] = \mathbb{E}_z[\mathbb{E}_{X_s}[f(X_{t-s})\mathbf{1}_{t-s<S_B}]\mathbf{1}_{s<S_B}] \\ &\leq \mathbb{E}_z[f(X_s)\mathbf{1}_{s<S_B}],\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

la seconde égalité provenant de la propriété de Markov et l'inégalité du fait que f est excessive sur B (au voisinage de z). Faisant décroitre s vers 0, $X_s \to z$ et $f(X_s) \to 0$, ce qui donne, grace au théorème de convergence dominée [14] : $\mathbb{E}_z[f(X_t)\mathbf{1}_{t<S_B}] = 0$, cela contredit le fait que $f(X_t) > 0$ lorsque $X_t \in B$, ce qui est le cas si $t < S_B$. $\rhd$

5 Retour à Green

Le théorème de régularité démontré permet de donner une solution au problème de Dirichlet que l'on s'est posé au paragraphe 1. Il est à noter que le caractère C^∞ de la solution n'est absolument pas évident au vu de l'expression de la solution ; c'est cependant un fait général. Cette régularité et le *principe du maximum* nous assurent l'unicité de la solution au problème dans le cas où B est régulier (*i.e.* tous les points de son bord sont réguliers).

[14] On peut supposer f bornée, le minimum de deux fonctions surharmoniques le restant.

Il est remarquable que le problème de Dirichlet ne soit résoluble (*i.e. pour toute* fonction f continue sur le bord ...) que si B est régulier.

Soit en effet $z \in \partial B$ et $f \geq 0$ un fonction continue sur ∂B, nulle en z uniquement. Toute solution h au problème devra vérifier sur $\overline{B}$ $h(x) = \mathbb{E}_x[f(X_{S_B})]$ [15]; appliquée au point z, cette formule nous dit que $\mathbb{P}_z(T = 0) = 1$.

Dans le cas où B est régulier, l'unicité force toute solution h au problème à satisfaire sur B l'identité :

$$h(x) = H_B h(x) \tag{5.0.2}$$

Assez curieusement, l'hypothèse de régularité de B qui nous assure l'unicié de la solution, et donc la validité de (5.0.2), n'est pas indispensable pour obtenir cette représentation ; en d'autres termes, *toute solution est toujours la moyenne harmonique de ses valeurs sur le bord* : quel que soit $x \in B$, $h(x) = H_B h(x) = \mathbb{E}_x[h(X_{S_B})]$.

Approchons B par une suite croissante $\{B_n\}$ de domaines lisses (pour lesquels la condition de cone est satisfaite). Du fait de la continuité de X et celle de u sur $\overline{B}$, on a les convergences presque sûres suivantes : $S_{B_n} \to S_B$, $X_{S_{B_n}} \to X_{S_B}$, $u(X_{S_{B_n}}) \to y(X_{S_B})$. Puisque u est bornée (B est borné) et qu'on a l'égalité (5.0.2) avec B_n en place de B, le théorème de convergence dominée s'applique alors et donne la représentation attendue.

Il peut paraitre étrange qu'on n'ait pas besoin de la régularité de B pour obtenir ce résultat... Il y a derrière cela une raison profonde : bien qu'il puisse y avoir sur ∂B des points irréguliers, presque aucune trajectoire ne les rencontre, ces points sont invisibles pour une particule brownienne.

De tels ***ensembles*** sont dits ***polaires*** ; ce sont exactement les ensembles de capacité nulle que l'on a rencontré dans l'exposé précédent.

6 Pour finir le voyage

On revient ici un instant sur la notion de mesure d'équilibre abordée dans le premier exposé pour en donner une approche probabiliste, due à Hunt et Chung. On notera dans cette partie $K := \overline{B}$

Théorème 6.1. – ***Hunt***– *Définissons, pour $x \in \mathbb{R}^3$,*

$$P_K 1(x) := \mathbb{P}_x(X_t \in K \text{ pour un certain } t > 0).$$

[15] C'est la formule de Chung, *cf* M. Rao p 4.3.

$P_K 1$ s'écrit de manière unique comme le potentiel d'une mesure μ_K à support dans K : $P_K 1 = U^{\mu_K}$. Cette mesure μ_K est concentrée sur ∂B et vérifie la propriété d'extrêmalité suivante : toute autre mesure μ à support dans K, de potentiel ≤ 1 sur K, a son potentiel majoré par celui de μ_K dans tout l'espace.

Cette mesure est la mesure d'équilibre qu'on a trouvée comme mesure d'énergie minimale dans l'exposé précédent ; sa masse est la capacité de K ; on a aussi : $C(K) = \min\{E(\mu); \mu \text{ probabilité à support dans } K\}$, le minimum étant atteint en la seule probabilité $\frac{\mu_K}{C(K)}$.

Donnons maintenant une magnifique interprétation probabiliste de la mesure d'équilibre due à Chung et qui généralise le théorème de Hunt. On définit le dernier temps de passage dans K par la formule : $L := \sup\{t > 0; X_t \in K\}$ [16]

Théorème 6.2. *Pour $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in K$ et $t > 0$, on a*

$$\mathbb{P}_x(X_L \in dy, L \in dt) = p_t(x,y)\mu_K(dy)dt$$

Puisque $\{L > 0\} = \{X_t \in K \text{ pour un certain } t > 0\}$, le résultat de Hunt s'ensuit. La notion de mesure d'équilibre éclairée, le théorème suivant donne une interprétation géométrique de la capacité.

Théorème 6.3. – ***Kesten, Spitzer, Whitman*** – *Considérons la **saussice de Wiener** de X définie par :*

$$S_t := \bigcup_{s \leq t} (K + X_s).$$

Alors [17]

$$\frac{|S_t|}{t} \to C(K), \text{ presque sûrement }.$$

Chose promise, chose due, voici la démonstration du résultat dont on s'est servi pour montrer que la fonction $x \to \mathbb{E}_x[S_B]$ est semi-continue inférieurement :

Proposition 6.4. *$x \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{E}_x[S_B]$ est bornée sur $\mathbb{R}^3$.*

[16] Avec la convention que $\sup \emptyset = 0$; L pour last.

[17] $|A|$ désigne la mesure de Lebesgue de A.

$\triangleleft$ Si $x \notin \overline{B}$, $\mathbb{E}_x[S_B] = 0$. Si $x \in B$, on majore par $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x(S_B > n)$ et chaque $\mathbb{P}_x(S_B > n)$ par $\mathbb{P}_x(X_1 \in B, ..., X_n \in B)$. On estime alors cette dernière quantité grâce à Markov :

$$\mathbb{P}_x(X_1 \in B, ..., X_n \in B) = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{X_1 \in B, ..., X_{n-1} \in B} \mathbb{P}_{X_{n-1}}(X_1 \in B)].$$

Comme

$$\mathbb{P}_{X_{n-1}}(X_1 \in B) = \int_B p_1(0, X_{n-1} - y)dy \leq \sup_{x \in B} \int_B p_1(0, x - y)dy =: \theta < 1$$

(car $\theta \leq \int_{B(0,2R)} p_1(0,z) < 1$, si $B \subset B(0,R)$), on obtient par récurrence

$$\mathbb{P}_x(X_1 \in B, ..., X_n \in B) \leq \theta^n,$$

inégalité valable indépendamment de $x \in B$ et qui donne la majoration $E_x[S_B] \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^n = \frac{1}{1-\theta} < +\infty$.

Si $x \in \partial B$, on refait ce que l'on vient de faire avec un B juste un peu plus grand... $\triangleright$

Bibliographie : *Green, Brown and Probability and Brownian motion on the Line*, Kai Lai Chung, World Scientific,

Brownian motion and classical potential theory, Murali Rao, Aarhus Universitet, Lecture notes Series, n 47.