Tout ce qui se passe a lieu dans $\mathbb{R}^3$. Rappeler les formule de Green.
m désigne la mesure de Lebesgue.

1 Un peu d'électrostatique...

1.1 Les motivations physiques

Considérons un corps chargé ; si l'on place une particule q en un point m de l'espace, on observe qu'une force $\overrightarrow{\mathcal{F}}(m)$ proportionelle à q s'exerce sur la particule, et que si l'on a plusieurs corps, ces forces s'ajoutent. Si ce corps est un point placé en m_0, portant une charge e, on a determiné expérimentalement que $\overrightarrow{\mathcal{F}}(m) = \frac{e}{|m-m_0|^3}(m - m_0)$. Lagrange s'aperçoit au 18ème siècle que cette force dérive d'un potentiel :

$$\overrightarrow{\mathcal{F}}(m) = -\nabla U(m), \text{ où } U(m) = \frac{e}{|m - m_0|.}$$

Notons que si l'on déplace la charge q d'un point m à un point $\tilde{m}$ suivant un chemin γ de classe C^1, le ***travail*** $W_{\overrightarrow{\mathcal{F}},\gamma}$ ***de*** $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ ***le long de ce chemin*** vaut : $\int_\gamma \dot{\gamma}.\overrightarrow{\mathcal{F}} = q(U(\widetilde{m}) - U(m))$; cette quantité ne dépend donc du chemin γ que via ses extrêmités.

Supposons maintenant les charges réparties dans l'espace suivant un densité ρ de support D :

$$\text{"la charge totale d'une portion } B \text{ de l'espace est } \int_B \rho dm."$$

Si l'on découpe D en $\bigcup\limits_{i\in I} B_i$ et que l'on remplace chaque portion B_i par un point $m_i \in B_i$ portant une charge $\rho(m_i)vol(B_i)$, $F(m)$ vaut environ $\sum\limits_{i\in I} \frac{\rho(m_i)vol(B_i)}{|m-m_i|^3}(m - m_i)$; on endéduit que la force exercée par la répartition de charge sur un point m n'appartenant pas à D est $\overrightarrow{\mathcal{F}}(m) = \int_D \frac{\rho(m)}{|m-\xi|^3}(m - \xi)d\xi$; elle s'écrit encore $-\nabla U(m)$, où le potentiel U est défini par $U(m) = \int_D \frac{\rho(m)}{|m-\xi|}d\xi$.

Par analogie, on définit le ***potentiel d'une mesure borélienne finie*** μ par la formule $U^\mu(m) = \int \frac{d\mu(\xi)}{|m-\xi|}$.

Exercices *1.1.* **1)** Soit $R > 0$; montrez que l'intégrale $\int_{|m|<R} U^\mu(m)$ est finie si la mesure μ est à support compact. En déduire que U^μ est finie m-presque sûrement.

2) Montrez que dans les mêmes conditions, U^μ est de classe C^∞ et harmonique *en dehors de son support*.

Deux questions se posent alors :

α) *Peut-on retrouver la mesure μ lorsqu'on connait son potentiel ?*

β) *On vient de voir que $\triangle U^\mu = 0$ en dehors du support de μ ; quelle équation régit U^μ à l'intérieur du conducteur ?*

1.2 Vers une réponse à ces questions...

Proposition 1.1. *Soit Ω un ouvert dont le bord Σ est assez lisse pour que l'utilisation du théorème de Stokes soit justifiée. Supposons que Ω porte une répartition de charges de densité ρ dont le support ne rencontre pas Σ, créant un champ de force $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ en tout point de l'espace. Le flux de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ à travers Σ est alors un multiple de la charge totale que la surface enserre :*

$$\int_\Sigma \overrightarrow{\mathcal{F}}.\overrightarrow{n}d\sigma = 4\pi \int_\Omega \rho dm$$

L'intégrale de gauche valant d'après le théorèmede Stokes $\int_\Omega div\overrightarrow{\mathcal{F}}(m)dm = -\int_\Omega \triangle U^\rho(m)dm$, on obtient, en faisant tendre Ω vers un point x_0, l'égalité suivante :

$$\triangle U^\rho(x_0) = -4\pi\rho(x_0)$$

qui nous permet de retrouver ρ à l'aide de U^ρ seulement.

$\lhd$ Supposons qu'une unique charge e se trouve dans Ω ; on va voir que le flux à traves Σ du champ qu'elle crée vaut $4\pi e$.

Supposons, pour des commodités d'écriture, la charge en 0, et prenons ε assez petit pour que la boule fermée $\overline{B}(0,\varepsilon)$ soit incluse dans Ω ; notons Ω_ε le complémentaire de cette boule dans Ω. Une application du théorème de Stokes à cet ouvert donne, puisque U^μ est harmonique sur Ω_ε :

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \overrightarrow{\mathcal{F}}.\overrightarrow{n}d\sigma = \int_{\Omega_\varepsilon} div\overrightarrow{\mathcal{F}}dm = 0$$

c'est-à-dire :

$$\int_\Sigma \overrightarrow{\mathcal{F}}.\overrightarrow{n}d\sigma = -\int_{|m|=\varepsilon} \overrightarrow{\mathcal{F}}.\overrightarrow{n}d\sigma$$

$\overrightarrow{\mathcal{F}}(m)$ valant $e\frac{m}{\varepsilon^3}$ sur la sphère $|m| = \varepsilon$ et $n = -\frac{m}{\varepsilon}$, le résultat s'ensuit.

S'il y a plusieurs charges, on met plusieurs boules...

Dans le cas continu, on découpe Ω en B_i et on remplace B_i par une charge $\rho(m_i)vol(B_i)$ mise en un point m_i de B_i ; puis on passe à la limite. $\rhd$

Bien sûr, le passage à la limite précédent est absolument injustifié ! !

On établit dans le paragraphe suivant l'équation (1.1) dans un cadre plus général.

2 L'équation de Poisson

Commençons par nous intéresser à la régularité du potentiel associé à une répartition de charge $\rho \geq 0$.

Lemme 2.1. *U^ρ est de classe C^k si ρ est $C_c^k(\mathbb{R}^3)$. Si la densité ρ est seulement supposée borélienne, bornée, à support compact, son potentiel est tout de même continu dans tout l'espace.*

$\lhd$ Si l'expression $\int \frac{\rho(\xi)}{|m-\xi|}d\xi = \int \frac{\rho(m-\zeta)}{|\zeta|}d\zeta$ de $U^\rho(m)$ permet d'établir le premier résultat, la faiblesse des hypothèses dans le second cas ne permet pas de conclure directement. Pour s'en tirer, on approche le noyau discontinu $g_m : \xi \mapsto \frac{1}{|m-\xi|}$ par les noyaux continus $g_m^{(p)}$ coincidant avec g_m si $|m - \xi| \geq \frac{1}{p}$ et valant p lorsque $|m - \xi|$ est trop petit ($\leq \frac{1}{p}$). Le potentiel $U^\rho_{(p)}(m) := \int g_m^{(p)}(\xi)\rho(\xi)d\xi$ associé à $g_m^{(p)}$ a l'avantage sur U^ρ d'être continu dans tout l'espace ; on montre facilement que les $U^\rho_{(p)}$, $p \geq 0$, forment une suite de Cauchy qui converge uniformément vers U^ρ, ce qui permet de conclure. $\rhd$

Si la fin de la démonstration de la proposition 1.1 est complètement pipo, tout n'est pas à rejeter... au contraire, l'isolement des singularités est une bonne idée, comme en témoigne le résultat suivant, et son corollaire qu'on attendait.

Proposition 2.2. *Pour toute fonction ϕ de classe C^2, à support compact, et tout point m de $\mathbb{R}^3$, on a :*

$$\varphi(m) = \frac{-1}{4\pi} \int \frac{\triangle\varphi(\xi)}{|m-\xi|}d\xi$$

$\lhd$ On va voir que cela résulte essentiellement du théorème de Stokes. Pour cela, mettons le support de φ dans une boule ouverte $B(0, R)$ assez grande pour qu'elle contienne la boule $B(m,\varepsilon)$. Une application du théorème de Stokes au complémentaire Ω_ε de cette boule dans $B(0,R)$ nous donne :

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon}(\frac{\partial_n\varphi}{|m-\xi|}-\varphi\partial_n(\frac{1}{|m-\xi|}))d\sigma(\xi)=\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{\triangle\varphi(\xi)}{|m-\xi|}d\xi$$

puisque $\xi\mapsto\frac{1}{|m-\xi|}$ est harmonique sur Ω_ε. Il reste à remarquer que $\partial_n(\frac{1}{|m-\xi|})=-\frac{1}{r^2}$ en coordonnées polaires au voisinage de m, que $\partial_n\varphi$ est continue en m et φ et $\partial_n\varphi$ nuls sur la sphère $S(0,R)$, pour obtenir la conclusion en faisant tendre ε vers 0. $\triangleright$

Corollaire 2.3. *Si ρ est de classe C^2 et à support compact, alors*

$$\triangle U^\rho=-4\pi\rho.$$

$\triangleleft$ U^ρ étant de classe C^2 (Lemme 2.1) le laplacien est à prendre dans son acception usuelle. Profitant de la régularité des deux membres de l'équation à montrer, on établit celle-ci en testant U^ρ et ρ sur des fonctions C_c^∞. Mais si f est une telle fonction et R assez grand,

$$\int_{B(0,R)}(U^\rho\triangle f-\triangle U^\rho)dm=0,\ \ i.e.\ \int_{B(0,R)}U^\rho\triangle f dm=\int_{B(0,R)}f\triangle U^\rho dm.$$

Un petit coup de Fubini à gauche donne :

$$\int_{B(0,R)}U^\rho\triangle f dm=\int_{B(0,R)}U^\rho(\xi)(\int_{B(0,R)}\frac{\triangle f(m)}{|m-\xi|}dm)d\xi,$$

quantité égale à $-4\pi\int_{B(0,R)}f(\xi)\rho(\xi)d\xi$, d'après la proposition précédente ; quod erat demonstratum :-) $\triangleright$

En fait l'identité demeure si U^μ est le potentiel d'une mesure μ à support compact ; il faut alors entendre le laplacien au sens des distributions.

$\triangleleft$ Il n'y a qu'à tester contre des fonctions C_c^∞ :

$$\int\triangle U^\mu f=\int U^\mu\triangle f=\int(\int\frac{d\mu(\xi)}{|m-\xi|})\triangle f(m)dm=\int(\int\frac{\triangle f(m)}{|m-\xi|}dm)d\mu(\xi)=-4\pi\mu(f),$$

Fubini justifiant l'avant dernière égalité et la proposition 2.2 la dernière. $\triangleright$

3 Capacité d'un condensateur, potentiel et mesure d'équilibre

Soit B un conducteur (objet dans lequel les charges électriques peuvent bouger librement sous l'influence d'un champ électrique) situé à l'intérieur d'une surface Σ reliée à la terre. Mettons sur B une charge q et voyons ce qu'il advient... Ces charges créent un champ qui fait bouger les charges sur Σ ; après que les charges sur B et Σ se sont redistribuées pour être en équilibre, (la somme des forces qui s'exercent sur chacune d'elle est nulle), on est alors en présence d'un champ $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ de potentiel U. On observe que $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est nul dans B et que les charges sont situées sur Σ et ∂B. Si l'on suppose leur densité continue, U est lui-même continu sur tout l'espace (Lemme 2.1) : $U = 0$ sur Σ et le fait que $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ soit nul sur B implique la constance de U dans $\overline{B}$. On note V ce potentiel.

Affirmation : V est proportionnel à q. $C := \frac{q}{V}$ est la **capacité du condensateur**.

$\lhd$ Jetons une autre charge $\widetilde{q}$ sur B, à laquelle on associe $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$. Entre ∂B et Σ, $\frac{\widetilde{V}}{V}U$ et $\widetilde{U}$ sont deux fonctions harmoniques, continues jusqu'au bord, et satisfaisant les mêmes conditions sur ces bords... elles sont égales : $\widetilde{U} = \frac{\widetilde{V}}{V}U$. Si l'on note ρ_1 (resp. $\widetilde{\rho}_1$) la densité de charge sur ∂B, on a sur ∂B la remarquable identité suivante :

$$(\partial_n U)^+ - (\partial_n U)^- = (\partial_n U)^+ = -4\pi\rho_1$$

ainsi que son analogue avec $\widetilde{U}$ [1]. Cela nous fournit l'égalité : $\widetilde{\rho}_1 = \frac{\widetilde{V}}{V}\rho_1$; si on l'intègre, on obtient $\widetilde{q} = \frac{\widetilde{V}}{V}q$. $\rhd$

Fixons maintenant B et la charge q, et envoyons Σ à l'infini. Un optimiste espèrera que les fonctions U associées à chaque Σ convergent vers une fonction U_∞ :

$$\begin{cases} \text{harmonique hors de } B\,; \\ \text{nulle à l'infini}\,; \\ \text{constante sur } \partial B. \end{cases}$$

Il rêvera aussi que c'est le potentiel d'une distribution de charge μ_∞, de masse q. Un potentiel satisfaisant les conditions précédentes se nomme ***potentiel d'équilibre*** et la distribution de charge associée (si elle existe !) ***mesure d'équilibre***.

[1] $(\partial_n U)^- = 0$ car U (comme $\widetilde{U}$) est constante sur B.

A nouveau, la valeur V_∞ de U_∞ est proportionnelle à q : $q = C_\infty V_\infty$. C_∞ est la ***capacité* de** B et se note $C(B)$. On montre par exemple que la capacité d'une boule est son rayon.

L'existence des objets U_∞, μ_∞ est loin d'être évidente... La partie suivante va se charger d'éclairer notre lanterne.

4 Existence de la mesure d'équilibre

4.1 Un concept utile : l'énergie d'une mesure

En physique, on obtient toujours un équilibre comme une configuration minimisant une certaine énergie potentielle ; on va utiliser cette idée pour prouver l'existence d'une mesure d'équilibre.

Essayons de trouver l'expression d'une telle énergie... Supposons que des charges q_1,..., q_n, sont placées en des points m_1,..., m_n de l'espace. Si on laisse les charges évoluer, se repoussant les unes les autres, elles s'en vont à l'infini, fournissant un certain travail. Ce travail total est l'énergie potentielle du système (l'énergie potentielle d'un système est donc l'´énergie qu'il faut à Dieu pour amener les charges de l'infini et les mettre dans telle position). Envoyant une à une les particules à l'infini, cela donne : $W_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|m_i - m_j|}$.

Par analogie, on définit l'***énergie d'une mesure*** par :

$$E(\mu) := \int\int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|} = \mu(U^\mu) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Théorème 4.1. *Si B est un compact, il existe une probabilité sur B d'énergie minimale.*

$\lhd$ C'est un argument de compacité, l'hypothèse "B compact" étant ici pour nous assurer la compacité [2] de l'ensemble $\mathcal{P}(B)$ des probabilités sur B.

Notons $\gamma := \underset{\mu \in \mathcal{P}(B)}{E(\mu)}$; il existe une suite $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ de probabilités sur B, convergeant vers $\overline{\mu} \in \mathcal{P}(B)$ et telle que $E(\mu_n) \to \gamma$. Si tout se passe bien, $E(\overline{\mu}) = \gamma$...

On ne peut passer directement à la limite dans l'expression de $E(\mu_n) = \int \frac{d\mu_n(x)d\mu_n(y)}{|x-y|}$, la fonction intégrée étant singulière sur la diagonale. Qu'à cela ne tienne ! Utilisons la troncature $g^{(p)}$ du noyau $g : (x,y) \mapsto \frac{1}{|x-y|}$ que l'on a utilisé au Lemme 2.1 : $g^{(p)}$ coincide avec g si $|x-y| \geq \frac{1}{p}$ et vaut p si $|x-y|$ est trop

[2]pour la topologie $\mathcal{C}(B)^*$

petit ($\leq \frac{1}{p}$). L'énergie associée $E^{(p)}(\mu) := \int g^{(p)} d\mu(x) d\mu(y)$ vérifie, elle, la convergence $E^{(p)}(\mu_n) \underset{n,+\infty}{\rightarrow} E^{(p)}(\overline{\mu})$, puisque $g^{(p)}$ est continue. Il reste à constater que $E^{(p)}(\mu_n) \leq E(\mu_n)$, pour obtenir $E^{(p)}(\overline{\mu}) \leq \gamma$, puis $E(\overline{\mu}) \leq \gamma$, par convergence monotone, ce qui donne l'égalité souhaitée. $\triangleright$

4.2 Existence de la mesure d'équilibre

Ce que l'on esprère maintenant, c'est que que cette probabilité a un potentiel constant sur ∂B. On va voir, dans le théorème suivant, que c'est presque le cas ; mais avant de le formuler, essayons de redédinir la capacité d'un ensemble sans utiliser le potentiel ou la mesure d'équilibre, dont on ne sait pas encore s'ils existent ou non...

Vu sa définition, $C(B)$ correspond à la charge $\mu_0(B)$ d'une mesure sur B créant un potentiel égal à 1 sur B ; de plus, si, pour une mesure μ quelconque, $U^\mu \leq 1$ sur B, alors $\mu(B) = \mu(U_0^\mu) = \mu_0(U^\mu) \leq \mu_0(B)$. Cela nous suggère la définition suivante : " étant donné un borélien B, on définit sa capacité par : $C(B) := sup\{\mu(B); \mu$ borelienne à support dans B $, U^\mu \leq 1$ sur $B\}$ "

Remarque *4.1.* Si B porte une mesure non nulle de potentiel borné, $C(B)$.

Le ensembles de capacité nulle jouent le rôle des ensembles négligeables en théorie de la mesure. Ils sont toujours de mesure de Lebesgue nulle (exercice !).

On verra dans l'exposé probabiliste une interprétation de ce qu'est un ensemble de capacité nulle à l'aide du mouvement brownien.

On est maintenant à même de dire dans quelle mesure la probabilité $\overline{\mu}$ construite précédemment est la mesure d'équilibre que l'on recheche.

Théorème 4.2. *Soit B un compact et $\overline{\mu}$ une probabilité d'énergie minimale γ. Le potentiel de $\overline{\mu}$ vaut γ sur tout B, à l'exception peut-être d'un sous-ensemble de capacité nulle. De plus $U^{\overline{\mu}} \leq \gamma$ dans tout l'espace.*

La démonstration s'appuie sur trois faits généraux que l'on met ici en avant.

(1) L'énergie qu'on a défini est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire définie sur l'ensemble des mesure signées sur B par : $\langle \mu, \nu \rangle = \mu(U^\nu) = \nu(U^\mu)$, forme bilinéaire symétrique à laquelle manquent la positivité et le caractère défini positi pour qu'il s'agisse d'un produit scalaire (on verra dans la partie 5 ce qu'il en est). On a tout de même la proposition suivante, version locale du théorème de Cauchy-Schwarz, qui se démontre avec le même principe variationnel.

Proposition 4.3. *Toute probabilité ν sur B, d'énergie finie, vérifie l'inégalité :* $\langle \nu, \overline{\mu} \rangle \geq \langle \overline{\mu}, \overline{\mu} \rangle = \gamma$

$\lhd$ Il suffit d'exprimer le fait que, pour tout $t \in [0,1]$, $\mu_t := (1-t)\overline{\mu} + t\nu$ est d'énergie $\geq \gamma$. $\rhd$

(2) Le fait que U^μ soit la limite croissante des potentiels continus $U^\mu_{(p)}$ associés aux noyaux continus $g^{(p)}$ nous assure que si μ est à support compact, son potentiel est une fonction semi-continue inférieurement.

(3) Si S est borélien de capacité nulle, aucune mesure d'énergie finie ne charge S (exercice !).

Ces trois faits énocés, on peut démontrer le théorème.

$\lhd$ Le second point nous assurant que l'ensemble $\{m \in B; U^{\overline{\mu}}(m) < \gamma\}$ est borélien, notons le $\mathcal{E}$ (pour exceptionnel).

$\mathcal{E}$ est de capacité nulle : en effet, si tel n'était pas le cas, il existerait *sur $\mathcal{E}$* une probabilité ν de potentiel ≤ 1, a fortiori d'énergie finie. On aurait alors d'une part $\langle \nu, \overline{\mu} \rangle = \nu(U^{\overline{\mu}}) < \gamma$, puisque $U^{\overline{\mu}} < \gamma$ sur $\mathcal{E}$, et d'autre part $\gamma > \nu(U^{\overline{\mu}}) = \langle \nu, \overline{\mu} \rangle \geq \gamma$, en vertu du premier point...

$U^{\overline{\mu}}$ est donc, sur B, $\geq \gamma$, en dehors de l'ensemble $\mathcal{E}$ de capacité nulle. $\mathcal{E}$ étant de $\overline{\mu}$ mesure nulle (ce qu'affirme le point ***(3)***), on peut écrire : $\gamma = \int_B U^{\overline{\mu}} d\overline{\mu} = \int_{B \setminus \mathcal{E}} U^{\overline{\mu}} d\overline{\mu}$ ce qui force l'égalité $U^{\overline{\mu}} d\overline{\mu} = \gamma$ à avoir lieu $\overline{\mu}$ presque sûrement. La semi continuité inférieure de $U^{\overline{\mu}}$ nous donne alors l'inégalité $U^{\overline{\mu}} \leq \gamma$ *sur tout le support de $\overline{\mu}$.*

Le passage à tout l'espace se fait à l'aide du *principe du maximum* suivant [3] :
Pour une mesure ν à support compact, $\sup\limits_{\mathbb{R}^3} U^\nu \leq \sup\limits_{supp\ \nu} U^\nu$. $\rhd$

On a maintenant un candidat pour l'élection de Mr mesure d'équilibre... y at-t-il d'autres volontaires ?

[3] On ne démontre pas ici ce principe.

5 Unicité de la mesure d'équilibre

Théorème 5.1. *Un probabilité $\widetilde{\mu}$ sur B vérifiant les conditions* **(a)** $U^{\widetilde{\mu}} = \widetilde{\gamma}$ *sur B, en dehors d'un ensemble de capacité nulle, et* **(b)** $U^{\widetilde{\mu}} \leq \widetilde{\gamma}$ *dans tout l'espace, est égale à $\overline{\mu}$.*

La démonstration de ce théorème d'unicité va nous permettre de revenir sur les propriétés de la forme bilinéaire dont l'énergie est la forme quedratique, en particulier sur son caractère défini positif.

Proposition 5.2. *Soit $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ une mesure signée, différence de deux mesures (positives) à support compact. Pourvu que $|\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2$ soit d'énergie finie, σ est d'énergie positive, nulle si, et seulement si, $\sigma = 0$.*

$\lhd$ Tout repose sur l'égalitésuivante [4], qui affirme l'existence d'une constante $\beta > 0$ telle qu'on a pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\int \frac{d\xi}{|x-\xi|^2 |y-\xi|^2} = \frac{\beta}{|x-y|}.$$

Si l'on admet cette formule, l'hypothèse "$E(|\sigma|) < \infty$" permet d'appliquer le théorème de Fubini dans ce qui suit :

$$E(\sigma) = \frac{1}{\beta} \int d\sigma(x) \int d\sigma(y) \int \frac{d\xi}{|x-\xi|^2 |y-\xi|^2} = \int d\xi (\int \frac{d\sigma(z)}{|z-\xi|^2}) \geq 0$$

La nullité de $E(\sigma)$ impiquant l'égalité $\int \frac{d\sigma(x)}{|x-\xi|^2} = 0$ $d\xi$-presque sûrement, on a pour tout y $\int \frac{d\xi}{|y-\xi|^2} \int \frac{d\sigma(x)}{|x-\xi|^2} = 0$, ce dont on tire l'identité $\int \frac{d\sigma(x)}{|x-y|} = 0$, valable quelle que soit y. En d'autres termes, $U^\sigma = 0$, *i.e.* $U^\sigma_1 - = U^\sigma_2$, ce dont on a vu que cela implique $\sigma_1 = \sigma_2$, *i.e.* $\sigma = 0$. $\rhd$

La démonstration du théorème d'unicité est alors une simple formalité.

$\lhd$ On vérifie que $\overline{\mu} + \widetilde{\mu}$ est d´énergie finie et $\overline{\mu} - \widetilde{\mu}$ d'énergie nulle.

$U^{\overline{\mu}}$ et $U^{\widetilde{\mu}}$ étant toutes deux positives et bornées, le premier point est assuré. Pour le second, on commence par constater que l'égalité $\widetilde{\mu}(U^{\overline{\mu}}) = \overline{\mu}(U^{\widetilde{\mu}})$ forçant γ et $\widetilde{\gamma}$ à être égaux, $E(\overline{\mu} - \widetilde{\mu}) = E(\overline{\mu}) + E(\widetilde{\mu}) - 2\langle \overline{\mu}, \widetilde{\mu} \rangle = \gamma + \gamma - 2\gamma = 0$. $\rhd$

Voilà, c'est bien assez pour un exposé d'une heure !

Tout ceci n'est qu'un vaste recopiage de *Potential Theory*, John Wermer, Lecture Notes in Mathmatics, n 408.

[4]on trouvera dans *Brownian Motion and Classical Potential theory*, Murali Rao, Aarhus Universitet, p3.2, une démonstration courte et élégante de cette formule.