Le théorème de différentation de Lebesgue

Notons μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $B(x,r)$ une boule euclidienne de centre x et de rayon r. Pour une fonction mesurable $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ on note $\mu(g > t)$ la μ-mesure de l'ensemble $\{g > t\}$.

Théorème 1— *Soit $d \geqslant 1$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La limite suivante existe pour Lebesgue presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et satisfait l'identité*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x).$$

Démonstration – La démonstration du théorème 1 est conséquence du Lemme 3, dont la démonstration requiert le fait élémentaire suivant.

Lemme 2— *À toute famille de boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$, de réunion U de volume $\mu(U)$ fini, et à tout $0 < c < \mu(U)$ on peut associer un nombre fini de boules $B_1, \dots, B_k$ disjointes de la famille telle que $c < 3^d \sum_{i=1}^k \mu(B_i)$.*

◀ On peut en effet associer à c un ouvert O d'adhérence compact incluse dans U de volume $\mu(O) > c$. On extraie de notre famille de boules une famille finie qui recouvre $\overline{O}$ et on choisit B_1 comme l'une des boules de la famille finie de rayon maximal. On définit alors par récurrence B_{j+1} comme l'une des boules de la famille finie ne rencontrant pas $B_1 \cup \cdots \cup B_j$ et de rayon maximal parmi ces boules. Notons k le nombre d'itérations de cette récurrence. Toute boule de notre famille finie se trouve incluse dans une boule de même centre que l'une des B_ℓ et de rayon trois fois plus grand. Il s'ensuit que $c < \mu(O) \leqslant 3^d \sum_{i=1}^k \mu(B_i)$. ▶

Notons $(\mathcal{M}f)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$. Ce supremum correspondand avec le supremum où $r > 0$ est rationnel on voit que $\mathcal{M}f$ est une fonction mesurable de x.

Lemme 3— *On a pour tout $t > 0$ l'inégalité $\mu(\mathcal{M}f > t) \leqslant \frac{3^d}{t} \|f\|_{L^1}$.*

◀ La fonction $\mathcal{M}f$ étant définie par un sup on peut associer à chaque point x de l'ensemble $\{\mathcal{M}f > t\}$ un rayon $r_x > 0$ tel que $(\mathcal{M}_{r_x} f)(x) > t$. L'ensemble des boules $B(x, r_x)$ pour $x \in \{\mathcal{M}f > t\}$ recouvre $\{\mathcal{M}f > t\}$, aussi le volume de cette réunion est-il supérieur ou égal à $\mu(\mathcal{M}f > t)$. Toute constante $c < \mu(\mathcal{M}f > t)$ est donc strictement inférieure au volume de la réunion. Le Lemme 2 nous donne alors un ensemble fini $B_1, \dots, B_k$ de boules *disjointes* de notre famille tel que

$$c < 3^d \sum_{i=1}^k \mu(B_i) \leqslant 3^d \sum_{i=1}^k \frac{1}{t} \int_{B_k} |f| \leqslant \frac{3^d}{t} \int_{\mathbb{R}^d} |f|.$$

▶

Notons $(M_r f)(x) := \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f$; on a $\mathcal{M}f = \sup_{r>0} M_r(|f|)$. Il suffit de démontrer le théorème pour une fonction f à support compact – voyez-vous pourquoi ? Le résultat est trivial si la fonction est de classe C^1. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact on associe à tout $\varepsilon > 0$ une fonction g de classe C^1 à support compact telle que $\|f - g\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$ et on écrit pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\overline{\lim}_{r>0} |M_r f - f| > t\Big) &\leqslant \mu\Big(\overline{\lim}_{r>0} |M_r f - M_r g| > t/3\Big) + \mu\Big(\overline{\lim}_{r>0} |M_r g - g| > t/3\Big) \\
&\quad + \mu\Big(|g - f| > t/3\Big) \\
&\leqslant \mu\Big(\sup_{r>0} M_r(|f-g|) > t/3\Big) + 0 + \mu\Big(|f-g| > t/3\Big) \lesssim \frac{\varepsilon}{t},
\end{aligned}$$

en appliquant le Lemme 3 au premier terme de la deuxième majoration et l'inégalité de Chebychev au second. Le terme majoré ne dépendant pas de ε, arbitraire, il est nul. La conclusion s'ensuit de ce que $t > 0$ est aussi arbitraire. ▷