Loi forte des grands nombres

On donne dans cette note deux démonstrations classiques de la loi forte des grands nombres.

Théorème 1. *Soit $\big(X_n\big)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables alétaoires indépendentes, identiquement distribuées. Posons*

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

et supposons $\mathbb{E}\big[|X_1|\big] < \infty$. Alors $\frac{S_n}{n}$ converge presque surement vers $\mathbb{E}\big[X_1\big]$.

Comme les parties positives et négatives de X_n satisfont les memes hypothèses que X_n il suffit de démontrer le résultat dans la cas ou X_n est positive, non identiquement nulles. On note X une variable aléatoire de meme loi que les X_n. On désigne dans le cours des calculs par c une constante dont la valeur importe peu, et qui peut changer d'une occurance à une autre.

Première démonstration. La première démonstration fait appel à la notion de ***tribu invariante*** d'une suite quelconque $\big(Z_n\big)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires :

$$\mathrm{Inv}(Z_\bullet) = \bigcap_{n\geqslant 1} \sigma\big(Z_k\,;\, k\geqslant n\big).$$

On la suppose définie sur l'espace $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites a valeurs réelles, muni de sa tribu produit $\mathcal{F}$; la variable aléatoire Z_n est alors définie par la formule $Z_n(\omega) = Z_n(\omega_1, \omega_2, \dots) = \omega_n$. Un *événement invariant* A ne dépend d'aucun nombre fixé de variables $Z_1, \dots, Z_n$, quel que soit $n \geqslant 1$; aussi $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ appartient-il a A si et seulement si $(\omega_n, \omega_{n+1}, \dots) \in A$, quel que soit $n \geqslant 1$. Des exemples typiques sont

$$\big\{Z_\bullet \text{ converge}\big\} = \big\{\omega\in\Omega\,;\,\omega_\bullet \text{ converge}\big\}$$

ou bien

$$\Big\{\limsup_n \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \geqslant \alpha\Big\};$$

par contre, l'événement

$$\Big\{\limsup_n (Z_1 + \cdots + Z_n) \geqslant 0\Big\}$$

n'est pas invariant. *Voyez-vous pourqoi ?* Noter que quelles que soient les constantes a, b, on a $\mathrm{Inv}(a + bZ_\bullet) = \mathrm{Inv}(Z_\bullet)$ – *pouvez-vous le justifier ?*

Des probabilités différentes sur $(\Omega, \mathcal{F})$ assignent évidemment des valeurs potentiellement différentes aux évévenements invariants, comme a tous les autres événements d'ailleurs ! Construisons par exemple une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ en disant que $\mathbb{Q}(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$, et que si $X_1 = 1$ alors tous les $X_n, n \geqslant 2$, sont nuls, et si $X_1 = -1$, alors $X_n = n$, pour $n \geqslant 2$. Pour une telle constuction, la $\mathbb{Q}$-probabilité de l'événement invariant $\big\{Z_\bullet \text{ converge}\big\}$ vaut $\frac{1}{2}$. Si par contre on construit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui rend les Z_n indépendantes, la loi du $0-1$ de Kolmogorov affirme que tout événement invariant a une $\mathbb{P}$-probabilité égale a 0 ou 1.

Démonstration – Rappelons qu'on ne perd rien a supposer les X_n positifs. Il s'agit de démontrer que l'événement invariant

$$A_{\alpha\beta} := \Big\{ \liminf \frac{S_n}{n} \leqslant \alpha < \beta \leqslant \limsup \frac{S_n}{n} \Big\},$$

défini pour $0 \leqslant \alpha < \beta$ quelconques, est de probabilité nulle. (*Montrez en quoi cela permet de conclure.*) On va s'appuyer pour cela sur le lemme suivant.

Lemme 2 (Inégalité maximale de Hopf)**.** *Soit $Z_\bullet = \big(Z_n\big)_{n\geqslant 0}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires intégrables ; posons $\Sigma_n = Z_1 + \cdots + Z_n$, et désignons par A un événement de la tribu invariante de $Z_\bullet$. On a*

$$\mathbb{E}\Big[Z_1 \mathbf{1}_{A\cap\{\limsup \Sigma_n \geqslant 0\}}\Big] \geqslant 0.$$

Admettons un instant cette inégalité et appliquons-la à la suite $Z_n = \frac{2\alpha+\beta}{3} - X_n$ et l'événement invariant (pour $Z_\bullet$ comme pour $X_\bullet$) $A_{\alpha\beta}$ introduit ci-dessus, qui se ré-écrit

$$A_{\alpha\beta} = \left\{ \liminf \frac{\Sigma_n}{n} \geqslant \frac{\beta-\alpha}{3} > 0 \right\} \cap \left\{ \beta \leqslant \limsup \frac{S_n}{n} \right\} \subset \big\{ \limsup \Sigma_n \geqslant 0 \big\}.$$

Cela donne $\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{2\alpha+\beta}{3} - X_1\Big)\mathbf{1}_{A_{\alpha\beta}}\Big] \geqslant 0$, soit

$$\mathbb{E}\big[X_1 \mathbf{1}_{A_{\alpha\beta}}\big] \leqslant \frac{2\alpha+\beta}{3}\,\mathbb{P}\big(A_{\alpha\beta}\big).$$

Si on l'applique aussi aux $Z_i = \frac{2\beta+\alpha}{3} - X_i$, on obtient cette fois-ci

$$\mathbb{E}\big[X_1 \mathbf{1}_{A_{\alpha\beta}}\big] \geqslant \frac{2\beta+\alpha}{3}\,\mathbb{P}\big(A_{\alpha\beta}\big).$$

Comme X_1 est positive, non-identiquement nulle, et $\frac{2\beta+\alpha}{3} > \frac{2\alpha+\beta}{3}$, les deux inégalités ci-dessus ne peuvent avoir lieu simultanément que si $\mathbb{P}\big(A_{\alpha\beta}\big) = 0$.

Il reste à montrer le lemme. On introduit pour cela les notations $\Sigma_n^* = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \Sigma_k$, et $\Sigma_{2,n} = X_2 + \cdots + X_n$ et $\Sigma_{2,n}^* = \max_{2\leqslant k\leqslant n} \Sigma_{2,k}$, pour $n \geqslant 2$. Observons alors que

$$\Sigma_{n+1}^* = Z_1 + \big(\Sigma_{2,n+1}^*\big)^+,$$

si bien que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[Z_1 \mathbf{1}_{A\cap\{\Sigma_{n+1}^*\geqslant 0\}}\Big] &= \mathbb{E}\Big[\big(\Sigma_{n+1}^*\big)^+ \mathbf{1}_A\Big] - \mathbb{E}\Big[\big(\Sigma_{2,n+1}^*\big)^+ \mathbf{1}_{A\cap\{\Sigma_{n+1}^*\geqslant 0\}}\Big] \\
&\geqslant \mathbb{E}\Big[\big(\Sigma_{n+1}^*\big)^+ \mathbf{1}_A\Big] - \mathbb{E}\Big[\big(\Sigma_{2,n+1}^*\big)^+ \mathbf{1}_A\Big] \\
&\geqslant \mathbb{E}\Big[\big(\Sigma_{n+1}^*\big)^+ \mathbf{1}_A\Big] - \mathbb{E}\Big[\big(\Sigma_n^*\big)^+ \mathbf{1}_A\Big] \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

On a utilisé le fait que l'événement A est invariant pour dire que

$$\mathbb{E}\Big[\big(\Sigma_{2,n+1}^*\big)^+ \mathbf{1}_A\Big] = \mathbb{E}\Big[\big(\Sigma_n^*\big)^+ \mathbf{1}_A\Big],$$

et e fait que les suites Σ_n^* et $\big(\Sigma_n^*\big)^+$ sont croissantes. On conclut par convergence monotone en prenant la limite $n \to \infty$ dans le membre de gauche de l'inégalité (1) ci-dessus. ▷

L'argument donné ci-dessus prouve en fait un résultat plus fort que la loi forte des grands nombres, le théoreme ergodique de Birkhoff.

Deuxième démonstration. La deuxième démonstration, due a Etemadi, repose sur deux recettes : tronquer et regarder une sous-suite en utilisant la monotonie de la suite S_n (puisqu'on peut supposer les X_n positifs !), ainsi que l'usage des inégalités de Tchébychev et du lemme de Borel-Cantelli comme outils techniques.

Démonstration – Posons

$$Y_i = X_i \mathbf{1}_{X_i \leqslant i} \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

Comme

$$\begin{aligned}\sum_{i \geqslant 1} \mathbb{P}\big(Y_i \neq X_i\big) = \sum_{i \geqslant 1} \mathbb{P}(X_i > i) &= \sum_{i \geqslant 1} i\mathbb{P}\big(i \leqslant X < i+1\big) \\ &\leqslant \sum_{i \geqslant 1} \mathbb{E}\big[X \mathbf{1}_{i < X \leqslant i+1}\big] \leqslant \mathbb{E}[X] < \infty,\end{aligned}$$

les suites $\big(Y_n\big)_{n \geqslant 1}$ et $\big(X_n\big)_{n \geqslant 1}$ ne diffèrent presque sûrement que par un nombre fini de termes, d'après le lemme de Borel-Cantelli ; aussi la loi forte des grands nombres est-elle équivalente à montrer que $\frac{\mathfrak{S}_n}{n}$ converge presque surement vers $\mathbb{E}[X]$. On va d'abord démontrer le résultat pour une sous-suite. Etant donné $\alpha > 1$, posons $k_n = \big[\alpha^n\big]$ et regardons comment se comporte $\frac{\mathfrak{S}_{k_n}}{k_n}$.

a) On a d'une part $\mathbb{E}\Big[\frac{\mathfrak{S}_N}{N}\Big] \leqslant \mathbb{E}[X]$, pour tout N, et pour chaque $2 \leqslant n \leqslant N$, l'inégalité

$$\frac{\mathfrak{S}_N}{N} \geqslant \frac{\mathfrak{S}_{n-1}}{N} + \frac{\sum_{i=n}^{N} X_i \mathbf{1}_{X_i \leqslant n}}{N},$$

dont on tire

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathfrak{S}_N}{N}\right] \geqslant o_N(1) + \frac{N-n}{N}\,\mathbb{E}\big[X \mathbf{1}_{X \leqslant n}\big],$$

et donc la convergence de $\mathbb{E}\Big[\frac{\mathfrak{S}_N}{N}\Big]$ vers $\mathbb{E}[X]$ en envoyant N puis n vers ∞. (Cela nécessite l'introduction d'une limite inférieure pour être fait proprement.)

b) On a d'autre part, pour tout $\epsilon > 0$, d'après l'inégalité de Tchébychev,

$$\begin{aligned}\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathfrak{S}_{k_n}}{k_n} - \mathbb{E}\left[\frac{\mathfrak{S}_{k_n}}{k_n}\right]\right| > \epsilon\right) &\leqslant c \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{Var}\mathfrak{S}_{k_n}}{k_n^2} = c \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{Var}\big(Y_i\big) \\ &\leqslant c \sum_{i \geqslant 1} \mathrm{Var}\big(Y_i\big) \sum_{n\,;\,k_n \geqslant i} \frac{1}{k_n^2} \leqslant c \sum_{i \geqslant 1} \frac{\mathbb{E}\big[Y_i^2\big]}{i^2} \\ &\leqslant c \sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{i^2} \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{E}\Big[X^2 \mathbf{1}_{k \leqslant X < k+1}\Big] \leqslant c \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k} \mathbb{E}\Big[X^2 \mathbf{1}_{k \leqslant X < k+1}\Big] \\ &\leqslant c \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{E}\Big[X \mathbf{1}_{k \leqslant X < k+1}\Big] = c\,\mathbb{E}[X] < \infty.\end{aligned}$$

Le lemme de Borel-Cantelli nous dit donc que $\frac{\mathfrak{S}_{k_n}}{k_n} - \mathbb{E}\left[\frac{\mathfrak{S}_{k_n}}{k_n}\right]$ converge presque surement vers 0, et donc que $\frac{\mathfrak{S}_{k_n}}{k_n}$ et $\frac{S_{k_n}}{k_n}$, convergent presque surement vers $\mathbb{E}[X]$, d'après le point **a)**.
c) On utilise pour conclure le fait que puisque les X_n sont positifs, la suite S_n est croissante, si bien qu'en encadrant chaque n par $k_p \leqslant n \leqslant k_{p+1}$, on a

$$\frac{k_p}{k_{p+1}} \frac{S_{k_p}}{k_p} \leqslant \frac{S_{k_p}}{k_{p+1}} \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant \frac{S_{k_{p+1}}}{k_p} \leqslant \frac{k_{p+1}}{k_p} \frac{S_{k_{p+1}}}{k_{p+1}}$$

ce qui donne les inégalités presque sures

$$\frac{1}{\alpha}\,\mathbb{E}[X] \leqslant \liminf \frac{S_n}{n} \leqslant \limsup \frac{S_n}{n} \leqslant \alpha\,\mathbb{E}[X].$$

La conclusion $\liminf \frac{S_n}{n} = \limsup \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X]$, provient de ce que l'inégalité ci-desssus a lieu quel que soit $\alpha > 1$. $\triangleright$

On peut aussi obtenir la loi forte des grands nombre comme corollaire du théoreme de convergence des martingales rétrogrades et de la loi du 0-1 de Kolmogorov.