A propos du groupe des isométries d'un compact

Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, et K un compact de $\mathbb{R}^n$. On appelle **isométrie de** K toute isométrie de l'espace ambiant $\big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|\big)$, envoyant K dans lui-même. L'énoncé suivant affirme que *les compacts dont le groupe d'isométries sont les plus grands sont les réunions de sphères.*

Théorème 1. *Il existe un point p de $\mathbb{R}^n$ fixé par toutes les isométries de K ; ce point est dans l'enveloppe convexe de K.*

Démonstration – La démonstration de ce fait repose sur le lemme suivant.

Lemme. *La fonction r_K définie sur $\mathbb{R}^n$ par la formule*

$$r_K(m) = \max_{k\in K} \|m-k\|,$$

est continue.

La fonction r_K donne le rayon de la plus petite boule de centre donné m, contenant K. Admettons un instant ce résultat, et supposons que l'ensemble K ne se réduit pas à un point. La fonction r_K étant propre, elle atteint son minimum r. Si deux points p et q réalisaient ce minimum, le compact K, qui est inclus dans chacunes des boules fermées $B(p,r)$ et $B(q,r)$, serait inclus dans la boule fermée $B\left(\frac{p+q}{2}, \sqrt{r^2 - \frac{\|p-q\|^2}{2}}\right)$, de rayon strictement plus petit que r, contredisant la définition de r. La fonction r_K atteint donc son minimum en un unique point p, et la boule fermée $B(p,r)$ est la plus petite boule fermée contenant K. Une isométrie f de K envoyant K dans lui-même et la boule fermée $B(p,r)$ sur une boule de même rayon, on doit avoir $f\big(B(p,r)\big) = B(p,r)$. Comme $f\big(B(p,r)\big) = B\big(f(p),r\big)$, il s'ensuit que $f(p) = p$.

∘ Il nous reste à démontrer le lemme. On raisonna par l'absurde en supposant r_K non continue. Il existerait alors $\epsilon_0 > 0$ et une suite $\big(m_k\big)_{k\geqslant 1}$ de points de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers un certain point $\widetilde{m}$, tels que $\big|r_K(m_k) - r_K\big(\widetilde{m}\big)\big| \geqslant \epsilon_0$, quel que soit $k \geqslant 1$. Notons k_0 un point de K tel que $r_K\big(\widetilde{m}\big) = \big\|\widetilde{m} - k_0\big\|$, On aurait alors d'une part

$$K \subset B\Big(\widetilde{m}, r_K\big(\widetilde{m}\big)\Big) \subset B\Big(m_k, r_K\big(\widetilde{m}\big) + \epsilon_0\Big),$$

pour k assez grand, et donc

$$r_K\big(m_k\big) \leqslant r_K\big(\widetilde{m}\big) - \epsilon_0,$$

et d'autre part

$$r_K\big(m_k\big) \geqslant \big\|m_k - k_0\big\| \geqslant \big\|\widetilde{m} - k_0\big\| - \big\|m_k - \widetilde{m}\big\| \geqslant r_K\big(\widetilde{m}\big) - \frac{\epsilon_0}{2}$$

pour k assez grand, ce qui contredirait l'inégalité prédédente. ∘ ▷

Imaginons maintenant avoir sous la main un sous-groupe compact $\mathcal{G}$ de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, pour $n \geqslant 1$, et définissons une norme sur $\mathbb{R}^n$ en posant

$$\|x\| := \sup_{g \in \mathcal{G}} \big\|g(x)\big\|_{\mathrm{Eucl}}.$$

On vérifie sans mal que ce supremum est fini du fait que $\mathcal{G}$ est compact, et qu'il s'agit bien d'une norme. Mieux, tout élément de $\mathcal{G}$ agit maintenant comme une isométrie de l'espace. Imaginons aussi avoir sous la main un convexe non vide C, stable par tous les éléments du groupe $\mathcal{G}$. L'enveloppe convexe fermée de l'orbite d'un point quelconque de C est alors un convexe compact K stable par l'action de $\mathcal{G}$, inclus dans C. Le point p de $\mathbb{R}^n$ fixé par toutes les isométrie, d'après le théorème 1, est aussi dans K. Nous avons donc démontré le

Corollaire. *Tout convexe non vide C de $\mathbb{R}^n$, stable par $\mathcal{G}$, contient un point fixé par tous les éléments de $\mathcal{G}$.*

Cet énoncé nous permet de justifier le théorème classique suivant.

Théorème. *Tout sous-groupe compact $\mathbf{G}$ de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$ est conjugué à un sous groupe d'isométries euclidiennes de $\mathbb{R}^d$.*

DÉMONSTRATION – Désignons par $\mathcal{S}_d$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^d$ symétriques, et $\mathcal{S}_d^{>0}$ l'ouvert convexe formé par ceux d'entre eux qui sont définis positifs. L'application de $\mathbf{G}$ dans $\mathrm{GL}(\mathcal{S}_d)$ définie par la relation

$$\mathbf{g} \mapsto \big\{S \mapsto \mathbf{g}^t S \mathbf{g}\big\}$$

étant un morphisme de groupes continu, son image $\mathcal{G}$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathcal{S}_d)$. L'ouvert convexe $\mathcal{S}_d^{>0}$ étant stable par l'action de $\mathbf{G}$ – voyez-vous pourquoi ? le corollaire ci-dessus nous assure l'existence d'un endomorphisme symétrique défini positif h_0 fixé par tous les éléments de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire vérifiant $\mathbf{g}^t h_0 \mathbf{g} = h_0$, pour tous $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$. Si h_1 désigne la racine carrée de $h_0 = h_1^2 = h_1^t h_1$, l'identité précédente se ré-écrit $\big(h_1 \mathbf{g} h_1^{-1}\big)^t \big(h_1 \mathbf{g} h_1^{-1}\big) = \mathrm{Id}$, pour tous $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$, ce qui signifie bien que le groupe $h_1 \mathbf{G} h_1^{-1}$ est formé d'isométrie euclidiennes. $\triangleright$