
Invariance du domaine

Rappelons que deux *espaces* (topologiques) sont *homéomorphes* s'il existe une bijection continue, d'inverse continue, de l'un sur l'autre. On peut considérer une telle bijection comme un changement de coordonnées, si bien que deux espaces homéomorphes ont exactement les mêmes propriétés topologiques, compacité, connexité... puisque ce sont juste deux images d'un même objet. Un segment (ouvert ou fermé) et le cercle ne sont pas homéomorphes par exemple, comme enlever un point intérieur au segment le coupe en deux alors que ce n'est pas le cas pour le cercle. Ce même argument de connexité montre que l'ensemble \mathbf{R} des réels n'est pas homéomorphe à \mathbf{R}^d dès que $d \geq 2$. Il est beaucoup moins évident de justifier ce qui semble tout aussi intuitif¹, et qui constitue le *théorème d'invariance du domaine*, dû à Brouwer, popularisés sous la forme de son corollaire.

Théorème. *Soit U un ouvert de \mathbf{R}^d , et $f : U \mapsto \mathbf{R}^d$, une application continue, injective. Son image $f(U)$ est alors ouverte.*

Prenons $n < d$ et notons π l'injection canonique de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^d . Tout homéomorphisme f entre un ouvert U de \mathbf{R}^d et un sous ensemble de \mathbf{R}^n donnerait une application $\pi \circ f$ de U dans \mathbf{R}^d , continue et injective, dont l'image $\pi(f(U))$ serait contenue dans un sous-espace vectoriel strict de \mathbf{R}^d , et ne pourrait pas de ce fait être ouverte, contredisant l'énoncé du théorème. On a ainsi le

Corollaire. *Les espaces \mathbf{R}^d et \mathbf{R}^n ne sont homéomorphes que si $d = n$.*

DÉMONSTRATION – L'énoncé du théorème est équivalent au fait que pour toute fonction continue, injective, de la boule fermée B de \mathbf{R}^d dans lui-même, le point $f(0)$ est dans l'intérieur de $f(B)$. Partons du fait que $f : B \mapsto f(B)$ étant une bijection continue entre deux *compacts* elle définit un homéomorphisme entre ces deux ensembles². On note $g : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ une extension continue de l'inverse $f^{-1} : f(B) \mapsto B$ de f , construite par exemple à l'aide du *théorème d'extension de Tietze* (lequel est élémentaire et repose essentiellement sur le fait que la fonction distance à un ensemble est une fonction continue). On ne demande *pas* à g d'être globalement injective ou bijective, juste continue. La fonction g a le point $f(0)$ pour zéro.

Lemme. *Toute application continue $g' : f(B) \mapsto \mathbf{R}^n$, telle que $\|g' - g\|_\infty \leq 1$ admet au moins un zéro.*

1. L'intuition peut parfois donner de fausses impressions. Il est par exemple possible de construire une fonction continue du segment $[0, 1]$ et à valeurs dans le carré $[0, 1]^2$ dont l'image est le carré tout entier. Cette courbe ne sera évidemment pas injective, ce qui est prévenu par le théorème d'invariance du domaine.

2. Ce serait faux si l'ensemble B était ouvert : prenez un segment ouvert et un cercle privé d'un point ; deux points proches, de part et d'autre du point manquant du cercle auront des pré-images aux deux bouts du segments, ce qui empêche l'application inverse d'être continue.

En effet, l'application continue $g \circ f - g' \circ f = \text{Id} - g' \circ f$, envoyant la boule fermée B dans elle-même, par hypothèse, admet un point fixe x_0 , d'après le *théorème du point fixe de Brouwer*, si bien que $g'(f(x_0)) = 0$. Nous allons raisonner par *contradiction* et montrer que si $f(0)$ n'était pas dans l'intérieur de $f(B)$, on pourrait construire une petite perturbation g' de g n'ayant pas de zéro sur $f(B)$, en contradiction avec le résultat du lemme.

Partons pour cela du fait que $g : f(B) \mapsto B$ étant continue et nulle seulement en $f(0)$, à tout $\delta > 0$ on peut associer un voisinage \mathcal{V} de $f(0)$ et une constante $m > 0$ tels que $|g| \geq m$ en dehors de \mathcal{V} et $|g(\mathcal{V})| \leq \delta$. Si l'on pouvait construire une petite perturbation Id' de l'identité sur $f(B)$, coïncidant avec l'identité sur $f(B) \setminus \mathcal{V}$ et envoyant $f(B) \cap \mathcal{V}$ sur $f(B) \cap \partial\mathcal{V}$, et qui soit continue, l'application $g' := g \circ \text{Id}'$ serait continue, sans zéro et vérifierait $\|g' - g\|_\infty \leq 2\delta$, contredisant le lemme pour un choix de $\delta < \frac{1}{2}$. La construction effective d'une telle petite perturbation de l'identité n'est pas aisée, mais une petite variation sur ce thème fait l'affaire ; voici une façon de procéder.

Imaginons donc le point $f(0)$ est sur le bord de $f(B)$, et prenons un point z dans le complémentaire de $f(B)$ qui soit ϵ -proche de $f(0)$, en choisissant ϵ et δ de façon à ce que $|g| \geq \delta$ en dehors du voisinage 2ϵ de z ; notons $\mathcal{E} := \{y \in f(B) ; |y - z| \geq 2\epsilon\} =: f(B) \setminus \mathcal{V}$ cet ensemble et $\mathbb{S}_{2\epsilon}(z)$ la sphère de centre z et de rayon 2ϵ . On définit une petite perturbation continue Id' de l'identité sur $f(B)$ en posant $\text{Id}' = \text{Id}$ sur \mathcal{E} , et $\text{Id}'(y) = z + 2\epsilon \frac{y-z}{|y-z|} \in \mathbb{S}_{2\epsilon}(z)$, sur $f(B) \cap B_{2\epsilon}(z)$. Ainsi définie, Id' n'est cependant pas à valeurs dans $f(B) \setminus \mathcal{V}$, si bien qu'on ne sait pas si $g' = g \circ \text{Id}'$ s'annule ou pas, comme on ne sait pas si g s'annule ou pas sur la partie de la sphère $\mathbb{S}_{2\epsilon}(z) \cap (f(B))^c$ où l'on ne sait pas ce qu'elle fait – puisqu'elle y est définie à l'aide du théorème de Tietze. Pour palier à ce défaut, on approche g uniformément sur une grosse boule contenant $f(B)$ et $\mathbb{S}_{2\epsilon}(z)$ par un polynôme P , de façon à ce que P ne s'annule pas non plus sur $f(B) \setminus \mathcal{V}$. L'avantage est que l'image de la sphère par le polynôme est de mesure nulle³, donc de complémentaire dense, si bien qu'on peut trouver une constante de \mathbf{R}^n arbitrairement petite qui ne soit pas dans son image. Rajouter cette constante à P ne change pas le fait que P ne s'annule pas sur $f(B) \setminus \mathcal{V}$, mais assure en retour que P ne s'annule pas non plus sur $\mathbb{S}_{2\epsilon}(z) \cap (f(B))^c$. L'application $g' = P \circ \text{Id}'$ ainsi construite n'a pas de zéro sur $f(B)$, bien qu'elle soit uniformément proche de g , en contradiction avec l'énoncé du lemme. \triangleright

3. L'image par une application continue d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle peut être de mesure de Lebesgue non nulle : penser à l'escalier de Cantor, qui envoie surjectivement l'ensemble triadique de Cantor sur l'intervalle $[0, 1]$. On peut ici invoquer la version élémentaire du *théorème de Sard* disant que l'image par une application C^1 d'un ouvert de \mathbf{R}^k dans \mathbf{R}^ℓ , avec $k < \ell$, est de mesure de Lebesgue nulle. Dans le cas, présent, \mathbf{R}^{n-1} donne un paramétrage local de la sphère, et $n - 1 < n$:-). La démonstration de cette version de l'énoncé de Sard est totalement élémentaire, et consiste à découper un cube de \mathbf{R}^k en N petits cubes, et à utiliser le caractère uniformément Lipschitz de l'application sur le gros cube pour voir que l'image d'un petit cube de \mathbf{R}^k de côté N^{-1} a au plus une taille L/N dans \mathbf{R}^ℓ , pour une certaine constante L , si bien que la mesure de Lebesgue de l'image du gros cube est au plus de l'ordre de $N^k (L/N)^\ell = O(1/N^{k-\ell}) = o(1)$; cette mesure est donc nulle, puisqu'indépendante de N .