

Intégration : de Cauchy à Lebesgue en ligne droite

Pour $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$ on note $|z| \equiv \max(|z_1|, \dots, |z_d|)$ et on pose $B(r) \equiv \{z \in \mathbb{R}^d; |z| \leq r\}$.

1 Intégrale de Cauchy

On note $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact. Cette classe de fonction a une propriété intéressante.

1. Proposition (Dini) – Soit (f_n) une suite de fonctions continues toutes à support dans un même compact $K \subset \mathbb{R}^d$. Si (f_n) décroît simplement vers une limite f continue alors la suite converge uniformément vers f .

Démonstration – Les fonctions f_n et f étant continues, pour chaque $\epsilon > 0$ les ensembles fermés $\{f_n - f \geq \epsilon\}$ du compact K sont tous compacts. Puisque la suite de fonctions $(f_n - f)$ décroît ces ensembles compacts décroissent aussi. L'hypothèse signifie que leur intersection est vide. Il s'ensuit qu'une intersection finie de ces ensembles est déjà vide. En d'autres termes il existe un entier $n(\epsilon)$ tel que $f_n - f < \epsilon$ pour tout $n \geq n(\epsilon)$. $\square$

On définit l'intégrale de Cauchy de $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ comme limite d'une suite de Cauchy. On rappelle qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue. Prenons $r > 0$ tel que $\text{supp}(f) \subset B(r)$ et définissons les sommes de Riemann

$$S_n(f) \equiv (2^{-n})^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(2^{-n}k).$$

On reconnaît dans la quantité $(2^{-n})^d$ le volume d'un cube de côté 2^{-n} . Pour $\epsilon > 0$ fixé, l'uniforme continuité de f donne l'existence d'un entier $n(\epsilon)$ tel que $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon$ dès que $|y - x| \leq 2^{-n(\epsilon)}$. Pour $p > q \geq n(\epsilon)$ on a donc

$$\begin{aligned} |S_q(f) - S_p(f)| &= (2^{-q})^d \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \left((2^{-(p-q)})^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d; |2^{-p}k - 2^{-q}\ell| \leq 2^{-q}} f(2^{-p}k) - f(2^{-q}\ell) \right) \right| \\ &\leq (2(r+1))^d \sup_{|y-x| \leq 2^{-q}} |f(y) - f(x)| \leq (2(r+1))^d \epsilon \end{aligned}$$

La suite $(S_n(f))$ est donc une suite de Cauchy ; on note $\int f$ sa limite. On voit par sa définition que l'opération d'intégration sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ est linéaire et que $\int f \geq 0$ si $f \geq 0$. Pour f à support dans $B(r)$ on a $|\int f| \leq (2r)^d \|f\|_\infty$. De plus toute translatée $f(\cdot - x)$ d'une fonction $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ a même intégrale de Cauchy que f elle-même : $\int f(\cdot - x) = \int f$.

2. Proposition – Si (f_n) décroît simplement vers la fonction nulle alors $\int f_n$ décroît vers 0.

Démonstration – Si toutes les fonctions f_n sont à support dans $B(r)$ la quantité $|\int f_n| \leq (2r)^d \|f_n\|_\infty$ tend en effet vers 0 d'après le théorème de Dini. $\square$

2 Intégrale de Lebesgue

On va étendre la notion d'intégration à un ensemble plus grand $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ de fonctions sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, dites $\star$ -intégrables. L'intégrale de Cauchy sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ permet de définir une notion de taille $(\cdot)_\star$ d'une fonction positive quelconque. On va définir $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ comme l'ensemble des fonctions f qui s'approchent arbitrairement bien par des fonctions de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, en ce sens qu'il existe pour tout $\epsilon > 0$ une fonction $\varphi_\epsilon \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ telle que $(|f - \varphi_\epsilon|)_\star < \epsilon$. L'intégrale $\int f$ d'une telle fonction f sera alors la limite des intégrales de Cauchy des fonctions de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ approchant f . Au contraire du domaine $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ de l'intégrale de Cauchy, on va voir que le domaine $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ de son extension est stable par limite monotone, croissante ou décroissante, pourvu que les intégrales des éléments d'une telle suite restent bornées dans $\mathbb{R}$. C'est cette propriété de l'extension de Lebesgue de l'intégrale de Cauchy qui la rend si utile.

Une fonction $\star$ -intégrable peut très bien prendre des valeurs infinies. Nous verrons que si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et si $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est une fonction quelconque de taille nulle : $(|h|)_\star = 0$, alors h et $f + h$ sont aussi $\star$ -intégrables et $\int (f + h) = \int f$. Nous verrons aussi que si $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et non pas dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $(f_1 + f_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$. Les choses sont plus délicates lorsque l'on manipule des fonctions pouvant prendre les valeurs $\pm\infty$. Pour définir l'opération d'addition sur de telles fonction on utilise les conventions suivantes : $(+\infty) + (+\infty) := +\infty$, $(-\infty) - (-\infty) := -\infty$ et $(+\infty) - (+\infty) := 0$, ainsi que la règle $\pm\infty + c := \pm\infty$ pour tout $c \in \mathbb{R}$. On a en particulier $|(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$ pour tous $a_1, a_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Bien qu'utiles et suffisantes pour ce que l'on va faire, ces règles simples ne définissent pas une loi de groupe associative sur $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ puisque $0 = +\infty + (-\infty + 1) \neq (+\infty - \infty) + 1 = 1$. L'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ n'a donc pas de structure d'espace vectoriel, bien qu'on puisse définir sans équivoque la somme de deux fonctions dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Il s'avère cependant que toute fonction de cet espace s'écrit de manière unique $f = g + h$ où $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ est à valeurs réelles et $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \{\pm\infty\}$ est de taille nulle. Nous verrons que pour une telle décomposition $f_1 = g_1 + h_1$ et $f_2 = g_2 + h_2$ de deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ la fonction bien définie $g_1 + g_2$ ne diffère de $f_1 + f_2$ que d'une fonction de taille nulle. L'espace " $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ modulo des fonctions de taille nulle" sera donc un espace vectoriel, sur lequel on verra que l'intégrale est définie sans équivoque.

2.1 Fonctions $\star$ -intégrables et leurs intégrales

On définit la *taille* d'une fonction positive quelconque $h: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$, possiblement égale à $+\infty$, par la formule

$$(h)_\star := \inf \left\{ \sum \int \psi_\ell; h \leq \sum \psi_\ell, \text{ avec } \psi_\ell \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d) \text{ positive pour tout } \ell \right\}.$$

On a $(h)_\star \leq (k)_\star$ si $h \leq k$. Pour deux fonctions h_1, h_2 à valeurs dans $[0, +\infty]$ on a

$$(h_1 + h_2)_\star \leq (h_1)_\star + (h_2)_\star \quad (1)$$

puisque si $h_1 \leq \sum \psi_{1\ell}$ et $h_2 \leq \sum \psi_{2\ell}$ alors $h_1 + h_2 \leq \sum (\psi_{1\ell} + \psi_{2\ell})$. On dit que l'application $(\cdot)_\star$ est *sous-additive*. Plus généralement, pour toute suite (h_n) de fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$ on a¹

$$\left(\sum h_n \right)_\star \leq \sum (h_n)_\star \quad (2)$$

On dit alors que l'application $(\cdot)_\star$ est σ -*sous-additive*. On a aussi

$$|(|h_1|)_\star - (|h_2|)_\star| \leq (|h_1 + h_2|)_\star \quad (3)$$

pour toutes fonctions h_1, h_2 à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en conséquence de (1). Notez qu'une fonction positive peut prendre la valeur $+\infty$ et vérifier $(h)_\star < \infty$, comme c'est le cas pour la fonction nulle partout sauf au point 0 où elle vaut $+\infty$.

3. Proposition – Pour $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ positive on a $(\varphi)_\star = \int \varphi \in \mathbb{R}$.

Démonstration – Soit $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ positive. D'abord, on a $(\varphi)_\star \leq \int \varphi$ puisqu'on peut prendre $\psi_1 = \varphi$ et toutes les autres fonctions ψ_i nulles. On montre ensuite qu'on peut en fait se restreindre dans l'infimum définissant $(\varphi)_\star$ à ne considérer que des suites (ψ_ℓ) telles que $\sum \psi_\ell = \varphi$. On répète pour cela de façon itérative la construction suivante tant que c'est possible. Si l'itération s'arrête c'est que la somme considérée est égale à φ .

¹ Les deux sommes dans (2) sont convergentes dans $[0, +\infty]$ comme il s'agit de sommes de quantités positives. La démonstration élémentaire de cette inégalité utilise le fait que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable pour ré-écrire une somme double $\sum_n \sum_\ell$ comme une somme indexée par $\mathbb{N}$.

Notons $\psi_0 = 0$. Dans le cas où $\sum_{\ell \geq 1} \psi_\ell > \varphi$ notons $\ell_1 \geq 1$ le plus petit entier tel que $\sum_{0 \leq \ell \leq \ell_1 - 1} \psi_\ell \leq \varphi$ et $\sum_{\ell \leq \ell_1} \psi_\ell(x) > \varphi(x)$ en au moins un point $x_1 \in \mathbb{R}^d$. Il suffit alors de remplacer ψ_{ℓ_1} par

$$\psi'_{\ell_1} := \min \left(\varphi, \sum_{\ell \leq \ell_1} \psi_\ell \right) - \sum_{\ell \leq \ell_1 - 1} \psi_\ell < \psi_{\ell_1}$$

pour construire une suite (ψ_i^1) telle que $\psi_i^1 = \psi_i$ si $i \neq \ell_1$ et $\psi_{\ell_1}^1 = \psi'_{\ell_1}$. Elle satisfait $\varphi \leq \sum_{\ell \geq 1} \psi_\ell^1$ mais avec $\sum_{\ell \geq 1} \int \psi_\ell^1 < \sum_{\ell \geq 1} \int \psi_\ell$. On définit alors par récurrence une suite $((\psi_i^n)_{i \geq 1})$ de suites de fonctions de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ et des entiers (ℓ_n) tels que ℓ_{n+1} est le plus petit entier supérieur à $\ell_n + 1$ tel que $\varphi(x_{n+1}) < \sum_{\ell \leq \ell_{n+1}} \psi_\ell^n(x_{n+1})$ pour au moins un point $x_{n+1} \in \mathbb{R}^d$. On pose alors $\psi_{\ell_{n+1}}^{n+1} := \min \left(\varphi, \sum_{\ell \leq \ell_{n+1}} \psi_\ell^n \right) - \sum_{\ell \leq \ell_{n+1} - 1} \psi_\ell^n < \psi_{\ell_{n+1}}^n$ et $\psi_i^{n+1} = \psi_i^n$ si $i \neq \ell_{n+1}$. On a $\varphi \leq \sum_{\ell \geq 1} \psi_\ell^{n+1}$ avec $\sum_{\ell \geq 1} \int \psi_\ell^{n+1} < \sum_{\ell \geq 1} \int \psi_\ell^n$. Pour chaque i la suite des $(\psi_i^n)_n$ est stationnaire, aussi on peut définir $\psi_i^\infty := \lim_n \psi_i^n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$. Cette suite satisfait par construction $\varphi = \sum_{i \geq 1} \psi_i^\infty$ et l'inégalité $\sum_{i \geq 1} \int \psi_i^\infty \leq \sum_{\ell \geq 1} \int \psi_\ell$.

Mais alors la suite croissante des sommes partielles $(\sum_{i \leq n} \psi_i^\infty)_n$ converge simplement vers φ , donc uniformément d'après le théorème de Dini puisque ces fonctions continues sont toutes à support dans un même compact. Il s'ensuit de la proposition 2 que $\int \varphi = \int (\sum \psi_i^\infty) = \sum \int \psi_i^\infty$. $\square$

Définition – Une fonction $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est dite $\star$ -**intégrable** s'il existe pour tout $\epsilon > 0$ une fonction $\varphi_\epsilon \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ telle que $(|f - \varphi_\epsilon|)_\star \leq \epsilon$.

On dit que φ_ϵ est ϵ -proche de f . La famille des $(\int \varphi_\epsilon)_{0 < \epsilon \leq 1}$ est alors de Cauchy puisque

$$\left| \int \varphi_{\epsilon_1} - \int \varphi_{\epsilon_2} \right| \leq \int |\varphi_{\epsilon_1} - \varphi_{\epsilon_2}| = (\|\varphi_{\epsilon_1} - \varphi_{\epsilon_2}\|)_\star \leq (\|f - \varphi_{\epsilon_1}\|)_\star + (\|f - \varphi_{\epsilon_2}\|)_\star \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$$

pour tout $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 \leq 1$, par sous-additivité de $(\cdot)_\star$. On a utilisé la proposition 3 dans la seconde égalité. Ce même calcul montre que toute autre famille $(\varphi'_\epsilon)_{0 < \epsilon \leq 1}$ de fonctions de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant $(|f - \varphi'_\epsilon|)_\star \leq \epsilon$ pour tout $0 < \epsilon \leq 1$ satisfait $|\int \varphi_\epsilon - \int \varphi'_\epsilon| \leq 2\epsilon$ pour tout $0 < \epsilon \leq 1$. On définit donc sans équivoque $\int f$ comme la limite des $\int \varphi_\epsilon$ lorsque ϵ tend vers 0.

L'indicatrice d'un cube unité est par exemple $\star$ -intégrable et d'intégrale 1. Il résulte immédiatement de la définition d'une fonction $\star$ -intégrable que si f est $\star$ -intégrable et $x \in \mathbb{R}^d$ alors la translatée $f(\cdot - x)$ est aussi $\star$ -intégrable et $\int f(\cdot - x) = \int f$.

Si $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ on peut prendre $\varphi_\epsilon = f$ pour tout ϵ , aussi $\int f$ coïncide-t-elle avec l'intégrale de Cauchy de f dans ce cas. Pour $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi_\epsilon, \psi_\epsilon \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ telles que $(|f - \varphi_\epsilon|)_\star + (|g - \psi_\epsilon|)_\star < \epsilon$ on a

$$(\|(f + g) - (\varphi_\epsilon + \psi_\epsilon)\|)_\star \leq (\|f - \varphi_\epsilon\|)_\star + (\|g - \psi_\epsilon\|)_\star < \epsilon.$$

On a donc $(f + g) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\int (f + g) = \int f + \int g. \quad (4)$$

Comme $||a| - |b|| \leq |a - b|$ pour tous $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$, on voit que

$$(\|f| - |\varphi_\epsilon|\|)_\star \leq (\|f - \varphi_\epsilon\|)_\star \quad (5)$$

pour tout $0 < \epsilon \leq 1$, aussi $|f|$ est-elle aussi $\star$ -intégrable si f est $\star$ -intégrable.

4. Proposition – Si $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ est $\star$ -intégrable alors $\int f = (f)_\star \geq 0$.

Démonstration – Pour f à valeurs dans $[0, +\infty]$ on voit sur (4) qu'on peut approcher f par la fonction positive à support compact $|\varphi_\epsilon|$ aussi bien que par φ_ϵ . On a donc d'après la proposition 3

$$\int f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int |\varphi_\epsilon| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (|\varphi_\epsilon|)_*.$$

Comme f est positive l'inégalité (2) prend ici la forme $|(f)_* - (|\varphi_\epsilon|)_*| \leq (|f - \varphi_\epsilon|)_*$, ce dont on tire la conclusion puisque $(|f - \varphi_\epsilon|)_*$ tend vers 0. $\square$

Voici une forme préliminaire de la propriété fondamentale de l'intégration.

5. Théorème – Pour toute suite (f_ℓ) de fonctions $\star$ -intégrables à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que $\sum \int f_\ell < \infty$ la fonction $\sum f_\ell$ est aussi $\star$ -intégrable et

$$\int (\sum f_\ell) = \sum \int f_\ell. \quad (6)$$

La même conclusion a lieu si on suppose les f_ℓ à valeurs dans $[-\infty, 0]$ et $\sum \int f_\ell > -\infty$.

Dans (6) les deux sommes de quantités positives sont convergentes dans $[0, +\infty]$.

Démonstration du théorème 5 – Soit (f_ℓ) une suite de fonctions $\star$ -intégrables à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que $\sum \int f_\ell < \infty$. Notez que la fonction $\sum f_\ell$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ est bien définie comme somme d'éléments de $[0, +\infty]$. Fixons $\epsilon > 0$ et associons à chaque f_ℓ une fonction $\varphi_\ell \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ qui est $2^{-\ell}\epsilon$ proche de f_ℓ . Puisque la suite croissante des sommes partielles $\sum f_\ell$ est majorée on peut introduire un entier $\ell(\epsilon)$ tel que $\sum_{\ell \geq \ell(\epsilon)} \int f_\ell \leq \epsilon$. On a alors

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum f_\ell - \sum_{\ell \leq \ell(\epsilon)} \varphi_\ell \right)_* \right| &\leq \left(\sum_{\ell \geq \ell(\epsilon)} f_\ell \right)_* + \left| \left(\sum_{\ell \leq \ell(\epsilon)} f_\ell - \sum_{\ell \leq \ell(\epsilon)} \varphi_\ell \right)_* \right| \\ &\leq \sum_{\ell \geq \ell(\epsilon)} (f_\ell)_* + \sum_{\ell \leq \ell(\epsilon)} (|f_\ell - \varphi_\ell|)_* \\ &\leq \epsilon + 2\epsilon \end{aligned}$$

On a utilisé la proposition 4 dans la dernière inégalité en notant que $(f_\ell)_* = \int f_\ell$ comme f_ℓ est $\star$ -intégrable et à valeurs dans $[0, +\infty]$. L'arbitraire sur $\epsilon > 0$ montre que $\sum f_\ell$ est $\star$ -intégrable.

On démontre maintenant l'égalité (6). On déduit de la proposition 4, de l'additivité de $(\cdot)_*$ sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ – équation (4), de son caractère croissant et de sa σ -sous-additivité – équation (2), qu'on a pour tout $n \geq 1$

$$\sum_{\ell=1}^n \int f_\ell = \sum_{\ell=1}^n (f_\ell)_* = \left(\sum_{\ell=1}^n f_\ell \right)_* \leq \left(\sum f_\ell \right)_* \leq \sum (f_\ell)_* = \sum \int f_\ell$$

et donc

$$\left(\sum f_\ell \right)_* = \int \left(\sum f_\ell \right) = \sum \int f_\ell.$$

Cela conclut la démonstration du théorème de l'énoncé. $\square$

2.2 Égalité presque partout et espace vectoriel $L^1(\mathbb{R}^d)$

La règle d'addition et de soustraction utilisée ne munit pas $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ d'une loi associative, comme $(+\infty - \infty) + 1 = 1$ alors que $+\infty - (+\infty - 1) = 0$. L'introduction de la notion suivante permet d'associer à chaque fonction $\star$ -intégrable à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une autre fonction $\star$ -intégrable à valeurs réelles et de définir in fine un espace vectoriel de 'fonctions' $\star$ -intégrables.

Définition – Une **fonction** $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est dite **négligeable** si $(|h|)_\star = 0$. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit **négligeable** si la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ est négligeable. On dit qu'une propriété dépendant de $x \in \mathbb{R}^d$ a lieu **presque partout** si l'ensemble des points où elle n'a pas lieu est négligeable.

Il s'ensuit de la σ -sous-additivité de $(\cdot)_\star$ qu'une somme au plus dénombrable de fonctions négligeables est négligeable. Puisque $|(h_1)|_\star - |(h_2)|_\star \leq |(h_1 + h_2)|_\star$ pour toutes fonctions h_1, h_2 à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ d'après (3), on voit que si f est $\star$ -mesurable et h négligeable alors $f + h$ est aussi $\star$ -intégrable et $\int (f + h) = \int f$.

Lemme – Si f est $\star$ -intégrable alors les fonctions $f\mathbf{1}_{|f|=+\infty}$ et $\mathbf{1}_{|f|=+\infty}$ sont négligeables.

Démonstration – Puisque $|f\mathbf{1}_{|f|=+\infty}| \leq |f|$ et que $(\cdot)_\star$ est croissante on a d'après le théorème 5

$$(|f\mathbf{1}_{|f|=+\infty}|)_\star = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n\mathbf{1}_{|f|=+\infty})_\star = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\mathbf{1}_{|f|=+\infty})_\star \leq (|f|)_\star < \infty.$$

Cela implique que $(\mathbf{1}_{|f|=+\infty})_\star = (|f\mathbf{1}_{|f|=+\infty}|)_\star = 0$. □

Une fonction $\star$ -intégrable f coïncide donc presque partout avec la fonction $\star$ -intégrable $f\mathbf{1}_{|f| \neq +\infty}$ à valeurs réelles. L'espace des fonctions $\star$ -intégrables modulo des fonctions négligeables est donc un *espace vectoriel* sur lequel l'opération d'intégration est définie de façon non équivoque. On le note $L^1(\mathbb{R}^d)$. Un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est à proprement parler une famille de fonctions qui diffèrent toutes les unes des autres par leurs valeurs sur des ensembles négligeables. Avec un petit abus de langage, on appelle *fonction intégrable* tout élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$. Une fonction positive de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ étant d'intégrale nulle si et seulement si elle est nulle, l'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$.

6. Proposition – L'opération d'intégration est linéaire sur l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration – Puisqu'on travail modulo des fonctions négligeables on peut remplacer toute fonction $\star$ -intégrable f par sa version $\star$ -intégrable $f\mathbf{1}_{|f| \neq +\infty}$ à valeurs réelles et utiliser les opérations usuelles sans précaution. Si f_i est ϵ -proche d'une fonction $\varphi_{i\epsilon} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, pour $i \in \{1, 2\}$, alors $f_1 + f_2$ est 2ϵ -proche de $\varphi_{1\epsilon} + \varphi_{2\epsilon}$, puisque

$$(|(f_1 + f_2) - (\varphi_{1\epsilon} + \varphi_{2\epsilon})|)_\star \leq (|f_1 - \varphi_{1\epsilon}| + |f_2 - \varphi_{2\epsilon}|)_\star \leq (|f_1 - \varphi_{1\epsilon}|)_\star + (|f_2 - \varphi_{2\epsilon}|)_\star \leq 2\epsilon$$

du fait de la croissance et de la sous-additivité de $(\cdot)_\star$. On a de plus

$$\int (f_1 + f_2) = \lim_{\epsilon} \int (\varphi_{1\epsilon} + \varphi_{2\epsilon}) = \lim_{\epsilon} \int \varphi_{1\epsilon} + \lim_{\epsilon} \int \varphi_{2\epsilon} = \int f_1 + \int f_2.$$

Qu'on ait pour tout nombre réel λ et toute fonction $\star$ -intégrable f l'identité $\int \lambda f = \lambda \int f$ est une conséquence immédiate de la définition de l'opération d'intégration. □

Il s'ensuit que

$$f_+ := \max(f, 0) = \frac{|f| + f}{2}$$

et

$$f_- = \min(f, 0) = \frac{f - |f|}{2}$$

sont toutes deux dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. De même, pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ les fonctions

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

et

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

sont toutes les deux dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on note $f \leq g$, $f < g$ si ces relations sont vérifiées presque partout.

2.3 Théorèmes d'interversion entre limite et intégrale

La démonstration du théorème 5 rend claire le fait qu'on a la même conclusion si la suite (f_ℓ) n'est de signe constant qu'à partir d'un certain rang, pourvu que l'on travaille modulo les fonctions négligeables afin de définir la somme $\sum f_\ell$ comme égale à une somme correspondante de fonctions réelles en dehors d'un ensemble négligeable. Le théorème 5 prend alors la forme suivante.

7. Théorème de convergence monotone – Pour toute suite (g_n) dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ monotone à partir d'un certain rang et telle que $\int g_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$ la fonction $g := \lim_n g_n$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\int g = \lim_n \int g_n$.

On en déduit le résultat fondamental suivant.

8. Proposition (Lemme de Fatou) – Soit (f_n) une suite d'éléments de $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tels que $f_n \geq g$ presque sûrement et la suite des intégrales $(\int f_n)$ est bornée. Alors $\liminf f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Démonstration – Posons $h_p = f_p - g \geq 0$. Comme $\min_{n \leq k \leq p} h_k$ décroît vers $\inf_{k \geq n} h_k$ lorsque p tend vers l'infini et $0 \leq \int \min_{n \leq k \leq p} h_k \leq \int h_n$, le théorème de convergence monotone garantit d'abord que $(\inf_{k \geq n} h_k) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $0 \leq \int \inf_{k \geq n} h_k \leq \int h_n$, puis, comme la suite $(\inf_{k \geq n} h_k)_n$ est croissante et $0 \leq \lim \int \inf_{k \geq n} h_k \leq \liminf_n \int (h_n - g) < \infty$, que $\liminf h_k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\int \liminf h_k \leq \liminf_n \int (h_n - f)$. Le résultat s'ensuit. $\square$

9. Théorème de convergence dominée – Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une fonction. Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $(f_n) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ une suite telle que $|f_n| \leq g$ pour tout n et f_n converge presque partout vers f . Alors $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\int |f_n - f|$ tend vers 0 et $\int f_n$ converge vers $\int f$.

Démonstration – On a $f_n \geq -g$ avec $(-g) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Comme f coïncide presque partout avec $\liminf f_n$ le lemme de Fatou nous assure d'abord que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On peut ensuite appliquer le lemme de Fatou aux suites $(|f_n - f|)$ et $(-|f_n - f|)$, toutes les deux minorées par $-2g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Puisque $\liminf |f_n - f| = \lim |f_n - f| = 0$ presque sûrement, on obtient les deux inégalités $0 = \int 0 \leq \liminf \int |f_n - f|$ et $0 = \int (-0) \leq \liminf (-\int |f_n - f|) = -\limsup \int |f_n - f|$ et donc le fait que $\int |f_n - f|$ tend vers 0. L'intégrale sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ étant une fonctionnelle positive et $\pm(f_n - f) \leq |f_n - f|$ on en déduit que $\int f_n$ converge vers $\int f$. $\square$

L'intégrale de Lebesgue est l'application linéaire qui à $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ associe $\int f$.

10. Théorème – La formule $\|f\|_1 := \int |f|$ définit sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ une norme qui en fait un espace complet, et $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$.

Démonstration – On a bien $\|cf\|_1 = |c| \|f\|_1$ et $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $c \in \mathbb{R}$. L'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ est construit pour que la seule classe d'équivalence de fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ de taille $\|f\|_1 = 0$ soit la classe d'équivalence de la fonction nulle.

Pour montrer la complétude de $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$ il suffit de montrer que toute suite de Cauchy (f_n) de cet espace y a une sous-suite convergente. On sait d'abord qu'une telle suite a une sous-suite $(f_{n(p)})$ telle que $\sum_p \|f_{n(p+1)} - f_{n(p)}\|_1 < \infty$. Le théorème de convergence monotone nous assure donc que la formule

$$g = \sum_p |f_{n(p+1)} - f_{n(p)}|$$

définit un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$. Cette somme coïncide donc presque partout avec une fonction à valeurs réelles. La série $f_{n(0)} + \sum_p (f_{n(p+1)} - f_{n(p)})$ converge donc dans $\mathbb{R}$ elle aussi presque partout ; notons f sa limite. On obtient alors la convergence dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ de la suite des sommes partielles $(f_{n(0)} + \sum_{p \leq k} (f_{n(p+1)} - f_{n(p)}))_k$ vers f en conséquence du théorème de convergence dominée puisque $|f_{n(0)} + \sum_{p \leq k} (f_{n(p+1)} - f_{n(p)})| \leq g$ pour tout k .

Tout élément de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ est par construction arbitrairement proche d'un élément de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ pour la taille $(|\cdot|)_*$ et donc pour $\|\cdot\|_1$ d'après la proposition 4. Il s'ensuit que $L^1(\mathbb{R}^d)$ a la même propriété. $\square$

On peut donc voir $L^1(\mathbb{R}^d)$ comme le complété de l'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. L'argument utilisé pour montrer la complétude de $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$ montre aussi que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ satisfait $\int |f - \varphi_n| \leq 2^{-n}$ alors f est la limite presque partout des φ_n .²

L'énoncé suivant permet de construire de nombreuses fonctions intégrables.

11. Proposition – Soit (f_n) une suite de $L^1(\mathbb{R}^d)$ convergeant presque partout vers f . S'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $|f| \leq g$ presque partout alors $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration – Posons $g_n = \min(g, \max(f_n, -g))$; on a $-g \leq g_n \leq g$ aussi la suite des $\int g_n$ est-elle bornée. Le théorème de convergence monotone nous assure que $\liminf g_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ce dont le résultat découle puisque f coïncide presque partout avec $\liminf g_n$. $\square$

12. Corollaire – Pour tous $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a $f_a^b \equiv \max(a, \min(f, b)) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Si de plus $f \geq 0$ alors $\mathbf{1}_{f>a} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $0 < a < +\infty$.

Démonstration – Notons (φ_n) une suite croissantes de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ de limite simple la fonction constante égale à 1. On applique successivement la proposition 11 à $(\max(a\varphi_n, \min(f, b\varphi_m)))_m$, de limite simple $\max(a\varphi_n, \min(f, b))$, puis à la suite de ces limites. C'est possible puisque $|\max(a\varphi_n, \min(f, b\varphi_m))| \leq |f|$ et $|\max(a\varphi_n, \min(f, b))| \leq |f|$ quels que soient les entiers n, m . Cela montre que $f_a^b \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Si de plus $f \geq 0$ et $a > 0$, la fonction positive $g_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ définie par la formule

$$0 \leq g_n = n \left(\min \left(f, a + \frac{1}{n} \right) - \min(f, a) \right) = \mathbf{1}_{f \geq a + \frac{1}{n}} + n(f - a) \mathbf{1}_{a < f \leq a + \frac{1}{n}} \leq \frac{f}{a} \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

converge presque partout vers $\mathbf{1}_{f>a}$. On a donc $\mathbf{1}_{f>a} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ d'après la proposition 11. $\square$

Notez qu'une fonction constante non nulle n'est pas un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$, aussi le fait que $f_a^b \in L^1(\mathbb{R}^d)$ n'est-il pas une conséquence du fait que $L^1(\mathbb{R}^d)$ est stable par les opérations min et max, comme on l'a vu après la proposition 6.

13. Théorème – Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ positive. Les fonctions $f_n \equiv \sum_{k \geq 1} k 2^{-n} \mathbf{1}_{k 2^{-n} < f \leq (k+1) 2^{-n}}$ sont intégrables pour tout n et f_n converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration – Le corollaire 12 nous assure que $\mathbf{1}_{k 2^{-n} < f \leq (k+1) 2^{-n}} = \mathbf{1}_{k 2^{-n} < f} - \mathbf{1}_{(k+1) 2^{-n} < f}$ est un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$. Ces indicatrices ayant des supports disjoints, la suite croissante et positive des sommes partielles $(f_{n,\ell} = \sum_{1 \leq k \leq \ell} k 2^{-n} \mathbf{1}_{k 2^{-n} < f \leq (k+1) 2^{-n}})_{\ell \geq 1}$ forme une suite de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dont les intégrales sont majorées par la constante $\int f$, puisque $0 \leq f_{n,\ell} \leq f_n \leq f$. La fonction f_n est donc intégrable d'après le théorème de convergence monotone. La suite (f_n) convergeant presque partout vers f on obtient la conclusion de la proposition 11. $\square$

2. Si l'on se retourne maintenant sur la construction de l'intégrale que l'on vient de donner, on s'aperçoit que les seules propriétés de l'intégrale de Cauchy que l'on a utilisé sont les suivantes : (a) son domaine est stable par les applications $f \mapsto \min(f, 1)$ et $f \mapsto |f|$, utilisées dans la proposition 3 et l'identité (4), respectivement ; (b) les intégrales $\int f_n$ décroissent vers 0 si f_n décroît simplement vers 0, utilisé dans la proposition 3. On peut répéter mot à mot toute la construction dès lors que l'on dispose d'une application linéaire I sur un domaine $\mathcal{L}$ qui satisfait les propriétés (a) et (b). L'espace ambiant $\mathbb{R}^d$ n'a en particulier joué aucun rôle dans toute cette section. On obtient ainsi une extension de I à un domaine plus grand qui satisfait les théorèmes de convergence monotone, de Fatou et de convergence dominée. Deux exemples élémentaires sont fournis par les cas où $\mathcal{L} = \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ et $I(f) = \int f g_0$ où $g_0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ est fixée, et lorsque $\mathcal{L}$ est l'ensemble des suites $a = (a_n)$ à support fini et $I(a) = \sum a_n$ ou $I(a) = \sum a_n b_n$ où (b_n) est une suite quelconque donnée. Notez que les notions de fonctions intégrables et de fonctions négligeables sont relatives à la donnée de départ $(I, \mathcal{L})$.