Fonctions holomorphes

On montre ici comment des résultats simples sur les fonctions holomorphes permettent d'obtenir des résultats profonds : l'injectivité de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$ et un énoncé de Picard sur l'image des fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Je rappelle que la propriété fondamentale des fonctions holomorphes est d'avoir des intégrales le long de chemins C^1 invariantes par déformation C^1 de ce chemin laissant les extrêmités fixes.[1]La formule de Cauchy est une conséquence directe de ce fait-là, ainsi que le fait qu'une fonction holomorphe h définie sur un ouvert simplement connexe sur lequel elle ne s'annule pas peut s'écrire $h = e^g$, pour une fonction holomorphe définie sur cet ouvert.[2]

1 – Injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction dont la transformée de Fourier $\widehat{f}(x) = \int e^{-ixt} f(t)dt$, est identiquement nulle. Pour a fixé notons $F_a(x)$ la valeur commune des deux membres de l'égalité

$$\int_{-\infty}^{a} e^{ix(t-a)} f(t)dt = -\int_{a}^{\infty} e^{ix(t-a)} f(t)dt.$$

Maintenant prenons x complexe. Le membre de gauche définit une fonction holomorphe de x dans le demi plan ouvert du haut $\{\mathrm{Im}x < 0\}$, bornée et continue sur le demi-plan fermé $\{\mathrm{Im}x \leqslant 0\}$. Le membre de droite définit une fonction holomorphe sur le demi-plan ouvert du bas $\{\mathrm{Im}x > 0\}$, bornée et continue sur le demi-plan fermé $\{\mathrm{Im}x \geqslant 0\}$. La fonction F_a est donc continue sur $\mathbb{C}$ tout entier, et holomorphe en dehors de $\mathbb{R}$. Elle est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, d'après le théorème de Morera. Étant bonée, elle est constante, d'après le théorème de Liouville. On voit que cette constante est nulle en prenant $x = is$, avec $s > 0$, dans le membre de droite et en envoyant s vers $+\infty$. Il s'ensuit qu'on a pour tout a

$$0 = F_a(0) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt,$$

ce dont on déduit que f est nulle presque sûrement. (Cette démonstration est dûe à D.J. Newman.)

2 – Petit théorème de Picard

Étant donné une fonction holomorphe $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on pose

$$M_r(f) := \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad A_r(f) := \max_{|z|=r} u(z).$$

Notez qu'on n'a pas de valeur absolue dans la définition de $A_r(f)$. Le résultat suivant est dû à Borel et Caratheodory.

Lemme 1. *On a pour tout* $0 < r < R$

$$M_r(f) \leqslant \frac{2r}{R-r} A_R(f) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

[1]Si $h : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe et $\gamma : [0,1]^2 \to D$ est une application de classe C^1 telle que $\gamma(s,0) = \gamma(0,0)$ et $\gamma(s,1) = \gamma(0,1)$ pour tout $0 \leqslant s \leqslant 1$, vue comme famille C^1 de chemins C^1 allant du point $\gamma(0,0)$ au point $\gamma(1,1)$, alors

$$\int_{\gamma(0,\cdot)} h = \int_{\gamma(1,\cdot)} h.$$

[2]Cette fonction est définie à une constante près par la formule $g(z) = \int_{\gamma(z)} \frac{f'}{f}$, pour tout chemin $\gamma(z)$ allant d'un point z_0 de l'ouvert fixé à z. L'invariance de l'intégrale par déformation C^1 implique que cette définition de g ne dépend pas du chemin C^1 allant de z_0 à z choisi, puisque l'ouvert est simplement connexe – deux chemins C^1 ayant les même extrêmités peuvent donc être reliés par une déformation C^1 à extrêmités fixes. On reconnait naïvement dans f'/f la dérivée de $\log f$.

Démonstration – C'est tout bête. Si $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, on a

$$\pi a_n R^n = \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \big(u(Re^{i\theta}) - A_R(f)\big)e^{-in\theta}d\theta,$$

si bien que

$$\pi|a_n|R^n \leqslant \int_0^{2\pi} \big(A_R(f) - u(Re^{i\theta})\big)d\theta = 2\pi A_R(f) - 2\pi \mathrm{Re}(a_0),$$

et

$$|a_n| \leqslant 2R^{-n}\big(A_R(f) + |f(0)|\big).$$

La conclusion s'ensuit. ▷

Posons par récurrence $\log^{\circ n} a := \log(\log^{\circ(n-1)}(a))$, pour a assez grand en fonction de $n \geqslant 1$. On dit qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ est de classe de croissance $n \geqslant 1$, noté $f \in \mathscr{C}(n)$, si

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^{\circ n}\big(M_r(f)\big)}{\log r} < \infty.$$

Le lemme précédent nous montre, en prenant $R = 2r$, que $f \in \mathscr{C}(n)$ si $\limsup_{+\infty} \frac{\log^{\circ n} A_r(f)}{\log r} < \infty$. Le résultat suivant est dû à Picard ; la démonstration qui suit est due à Zalcman.

Théorème 2. *Soit $f \in \mathscr{C}(n)$ non constante. Si l'image de f omet un point a de $\mathbb{C}$ alors f prend toutes les valeurs de $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ infiniment souvent.*

Démonstration – La démonstration se fait par récurrence sur $n \geqslant 1$. Le cas $n = 1$ correspond à une fonction $f(z) = \sum_k a_k z^k$ à croissance au plus polynomiale. La formule de Cauchy pour a_n nous dit alors que f est un polynôme non constant, lequel a tout $\mathbb{C}$ dans son image. Supposons maintenant le résultat démontré pour les fonctions de la classe $\mathscr{C}(n)$, et prenons $f \in \mathscr{C}(n+1)$ non constante, dont l'image omet un point $a \in \mathbb{C}$. On peut alors écrire $f(z) = a + e^{g(z)}$, pour une fonction holomorphe g. Comme $|f(z) - a| = \exp\big(\mathrm{Re}(g(z))\big)$ et $f \in \mathscr{C}(n+1)$ on a

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^{\circ n}\big(A_r(g)\big)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^{\circ(n+1)}\big(M_r(f)\big)}{\log r} < \infty,$$

si bien que le lemme 1 nous assure que $g \in \mathscr{C}(n)$. Le résultat s'ensuit. ▷

Picard a en fait montré que le résultat est vrai pour toute les fonctions holomorphes, sans se restreindre à la classe $\mathscr{C}(n)$.