Décomposition de Dunford

Théorème 1. *Tout endomorphisme A de $\mathbb{C}^n$ s'écrit $A = P(A) + (A - P(A))$ pour un polynôme P tel que $P(A)$ est diagonalisable et $(A - P(A))$ est nilpotente.*

L'unicité d'une telle décomposition vient de ce qu'un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ ne peut être diagonalisable et nilpotent sans être nul. Pour l'existence on obtient en fait le polynôme P via une itération finie qui repose sur la mécanique suivante. Si P est scindé à racines simples alors $P(A)$ est diagonalisable ; si de plus $X - P(X)$ divise le polynôme caractéristique χ_A de A alors $A - P(A)$ est nilpotente en conséquence de Cayley-Hamilton. On découpe la démonstration en trois temps notés (a), (b) et (c) ci-dessous.

(a) Notons donc $\chi_A(X) = \prod(X - \lambda_i)^{n_i}$ le polynôme caractéristique de A, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, et

$$\chi(X) = \prod(X - \lambda_i).$$

Lemme 2. *L'endomorphisme $\chi'(A)$ est inversible.*

Démonstration – Comme χ est sans facteur carré χ et χ' sont premiers entre eux, aussi il existe des polynômes Q_1 et Q_2 tels que

$$Q_1\chi + Q_2\chi' = 1 \tag{1.1}$$

et donc

$$Q_2(A)\chi'(A) = \mathrm{Id} - Q_1(A)\chi(A).$$

Mais χ ayant une puissance égale à χ_A, et comme $\chi_A(A) = 0$, l'endomorphisme $\chi(A)$ est nilpotent. Il en va de même de $Q_1(A)\chi(A)$ puisque $Q_1(A)$ et $\chi(A)$ commutent. L'endomorphisme $\mathrm{Id} - Q_1(A)\chi(A)$ est donc inversible, d'inverse $\sum_{k\geqslant 0}(Q_1\chi)^k(A)$, et donc $\chi'(A)$ aussi. $\triangleright$

(b) Définissons maintenant par récurrence $A_0 = A$ et

$$A_{k+1} = A_k - \chi'(A_k)^{-1}\chi(A_k) \tag{1.2}$$

tant que $\chi'(A_k)$ est inversible. Le lemme 2 nous dit que c'est le cas pour $k = 0$. Notons $\mathscr{P}_k$ l'assertion

A_k est un polynôme de A tel que $\chi'(A_k)$ est inversible et $\chi(A_k)\chi'(A_k)^{-1}$ est nilpotent, et $\chi(A_k) \in \chi(A)^{2^k}\mathbb{C}[A]$.

Cette dernière identité implique en particulier que $\chi(A_k)$ est nilpotente. Le lemme 2 nous dit que $\mathscr{P}_1$ est vérifiée. Si toutes les assertions $\mathscr{P}_k$ sont vraies, comme χ_A divise χ^{2^k} dès que $k \geqslant k_0 = \log_2(n)$, on aura $\chi(A_k) \in \chi(A)^{2^k}\mathbb{C}[A] \subset \chi_A(A)\mathbb{C}[A] = 0$ et $A_{k+1} = A_k$ à partir de ce rang. Le polynôme χ étant scindé, à racines simples, et annulant A_{k_0}, l'endomorphisme A_{k_0} sera diagonalisable. La décomposition

$$A_{k_0} - A = \sum_{\ell=0}^{k_0-1}\left(A_{\ell+1} - A_\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{k_0-1}\chi'(A_\ell)^{-1}\chi(A_\ell)$$

exprimera alors $A_{k_0} - A$ comme une somme d'endomorphismes nilpotents commutant deux à deux, car tous polynômes de A ; leur somme sera donc elle aussi nilpotente, ce qui conclura la construction de la décomposition de Dunford de A.

(c) Finalement on montre le caractère hérédiaire de la propriété $\mathscr{P}_k$. Supposons $\mathscr{P}_k$ vérifiée et notons que si un endomorphisme B de $\mathbb{C}^n$ est inversible son polynôme caractéristique $\chi_B(X) = X^n + \cdots + c$ a un coefficient constant c non nul si bien qu'on voit sur la relation $0 = B^{-1}\chi_B(B) = (\cdots) + cB^{-1}$ que B^{-1} est un polynôme de B. L'endomorphisme $\chi'(A_k)^{-1}$ est donc un polynôme de $\chi'(A_k)$, a fortiori un polynôme de A_k et donc de A d'après $\mathscr{P}_k$; de ce fait A_{k+1} est aussi un polynôme de A. La formule intégrale de Taylor à l'ordre 2 et la définition récurrente (1.2) de A_{k+1} nous donne alors

$$\begin{aligned}\chi(A_{k+1}) &= \chi(A_k) + \chi'(A_k)\big(-\chi'(A_k)^{-1}\chi(A_k)\big) + \varepsilon\big(A_k, -((\chi')^{-1}\chi)(A_k)\big)\Big(-(\chi')^{-1}\chi)(A_k)\Big)^2 \\ &= \varepsilon\big(A_k, -((\chi')^{-1}\chi)(A_k)\big)\Big(-((\chi')^{-1}\chi)(A_k)\Big)^2 \quad \in \quad \chi(A_k)^2\mathbb{C}[A] \subset \chi(A)^{2^{k+1}}\mathbb{C}[A]\end{aligned}$$

en conséquence de $\mathscr{P}_k$, si bien que $\chi(A_{k+1})$ est nilpotent, ainsi que $A_{k+1}-A_k$. Comme $\chi(A_{k+1})$ est un polynôme de A niplotent et qu'on a d'après (1.1)

$$Q_2(A_{k+1})\chi'(A_{k+1}) = \mathrm{Id} - Q_1(A_{k+1})\chi(A_{k+1})$$

on voit comme dans la démonstration du lemme 2 que $\chi'(A_{k+1})$ est inversible. La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ a donc bien lieu.