

Cours d'analyse avancée

Ce qui suit forme le cours d'analyse avancée du Master de Mathématiques de l'UBO.¹

1 Exemples d'espaces fonctionnels

L'analyse fonctionnelle est concernée par l'étude de fonctions définies sur des espaces dont les points sont eux-même des fonctions – on parle d'espaces fonctionnels. Nous nous intéresserons ici au cas particulier où ces espaces sont des espaces vectoriels normés. Beaucoup de problèmes mathématiques se posent sous la forme '*Montrez l'existence d'une unique fonction dans tel espace satisfaisant telle contrainte*'. Les méthodes génériques utilisées pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité sont distinctes et relativement peu nombreuses. Pour l'unicité : le fait qu'une application contractante a un unique point fixe. Pour l'existence : si le problème met en jeu un nombre fini d'objet, on exhauiste toutes les possibilités. Le meilleur proxi d'un ensemble fini est le cas où on est dans un ensemble compact d'un espace métrique. L'ensemble est 'fini' à ϵ près pour tout $\epsilon > 0$, et toute suite a une sous-suite convergente. Et il y a bien sûr le cadre des espaces complets, où toute suite de Cauchy converge.

Rappelons un résultat de F. Riesz. Si la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé X est compacte elle se recouvre par un nombre fini des boules fermées de rayon $1/2$: $\overline{B}(0, 1) \subset \bigcup_{i=1}^k \overline{B}(x_i, 1/2)$ avec $x_i \in \overline{B}(0, 1)$. En notant E l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les x_i (il est fermé) on a en particulier

$$\overline{B}(0, 1) \subset \left(E + \frac{1}{2} \overline{B}(0, 1) \right).$$

Une itération immédiate de cette identité donne

$$\overline{B}(0, 1) \subset \left(E + \left(\frac{1}{2} \right)^n \overline{B}(0, 1) \right)$$

puis $\overline{B}(0, 1) \subset E$ et $X \subset E$. L'espace est donc de dimension finie. Tous les espaces de fonctions avec lesquels nous travaillerons sont de dimension infinie ; leur boule unité fermée n'est donc pas compacte. Ce défaut de compacité est l'un des signes de la dimension infinie. Vue l'utilité de travailler dans des ensembles compacts il sera utile dans chaque cas de décrire autant que possible les sous-ensembles compacts des espaces considérés.

1.1 Espaces de fonctions continues

Pour une fonction f définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$ on note $\text{osc}(f, r) = \sup \{ |f(y) - f(x)| ; |y - x| \leq r, y, x \in A \}$ l'oscillation de f sur une boule quelconque de rayon r . On dit qu'une famille $\mathcal{S}$ de fonctions de A dans $\mathbb{R}$ est **équi-uniformément continue** s'il existe une fonction $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ telle que $\text{osc}(f, \omega(\epsilon)) \leq \epsilon$ pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$ et tout $0 < \epsilon \leq 1$. Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions qui satisfont toutes

$$|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|^\alpha$$

pour une constante C indépendante de f et $0 < \alpha \leq 1$ est équi-uniformément continue. Lorsque A est compact chaque fonction continue $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue. Elle a donc un module de continuité $\omega_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tel que $\text{osc}(f, \omega_f(\epsilon)) \leq \epsilon$ pour tout $0 < \epsilon \leq 1$. L'équi-uniforme continuité d'une famille $\mathcal{S}$ signifie qu'on peut prendre comme module de continuité la même fonction ω pour tous les éléments de cette famille.

1. I. BAILLEUL – ismael.bailleul@univ-brest.fr

Théorème (Ascoli 1883) – Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Une partie fermée $\mathcal{S}$ de $(C(A), \|\cdot\|_\infty)$ est compacte s'il existe un point $m_0 \in \Omega$ tel que l'ensemble $\{f(m_0)\}_{f \in \mathcal{S}} \subset \mathbb{R}$ est borné et $\mathcal{S}$ est équi-uniformément continue.

Démonstration – Soit (f_n) une suite de $\mathcal{S}$. Soit (x_k) une suite dense de A . La conjonction des deux hypothèses du $\mathcal{S}$ nous assure que tous les $f_n(x_k)$ sont dans un même compact de $\mathbb{R}$, qui dépend de k . Le procédé diagonal de Cantor nous donne une sous-suite $(f_{n(p)})_p$ telle que les $f_{n(p)}(x_k)$ convergent tous lorsque p tend vers l'infini et k est quelconque. On note $f(x_k)$ ce nombre limite. Pour un point x quelconque choisissons un point x_k qui est $\omega(\epsilon)$ -proche de x . Il existe un entier $p(k)$ tel qu'on a pour $p, q \geq p(\epsilon, k)$

$$|f_{n(p)}(x) - f_{n(q)}(x)| \leq |f_{n(p)}(x) - f_{n(p)}(x_k)| + |f_{n(p)}(x_k) - f_{n(q)}(x_k)| + |f_{n(q)}(x_k) - f_{n(q)}(x)| \leq 3\epsilon$$

du fait de l'équicontinuité de $\mathcal{S}$ pour les premier et troisième termes, et du fait de la convergence de la suite $(f_{n(p)}(x_k))_p$ pour le deuxième terme. La suite $(f_{n(p)}(x))_p$ est donc de Cauchy, et convergente. Notez que $p(\epsilon, k)$ dépend implicitement de x puisqu'il dépend de x_k , qui est choisi en fonction de x pour en être ϵ -proche. On utilise la compacité de A pour sélectionner un nombre fini de ces x_k tel que tout point de A est ϵ -proche de l'un de ces points. Le maximum $p(\epsilon)$ des $p(\epsilon, k)$ associés fait alors l'affaire pour tous les points de A à la fois. On obtient donc que $\|f_{n(p)} - f\|_\infty \leq \epsilon$ pour $p \geq p(\epsilon)$ en passant à la limite en q dans l'inégalité ci-dessus. $\square$

Arzelà a démontré en 1895 que la réciproque de l'énoncé est vraie.

Illustration (Schéma d'Euler) : Soit $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs continu et borné. Pour une compact K donné et $r > 0$ notons $\omega(V|_K, r)$ l'oscillation de V sur K . Le schéma d'Euler associe à toute condition initiale $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\epsilon > 0$ un chemin continu $(y^\epsilon(t))_{t \in [-1, 1]}$ de $\mathbb{R}^d$, affine dans chaque intervalle de temps $[k\epsilon, (k+1)\epsilon]$, pour $k \geq 0$, et dont les valeurs aux temps $k\epsilon$ satisfont la relation de récurrence $y^\epsilon((k+1)\epsilon) = y^\epsilon(k\epsilon) + \epsilon V(y^\epsilon(k\epsilon))$, avec $y^\epsilon(0) = x$. Ces chemins restent tous dans une boule de centre x et de rayon $\|V\|_\infty$. Ils fournissent presque une solution de l'équation différentielle $\dot{y} = V(y)$. En effet comme

$$y^\epsilon(k\epsilon) = y^\epsilon((k-1)\epsilon) + \int_{(k-1)\epsilon}^{k\epsilon} V(y^\epsilon(s))ds + \int_{(k-1)\epsilon}^{k\epsilon} \{V(y^\epsilon((k-1)\epsilon)) - V(y^\epsilon(s))\}ds$$

et que chaque $V(y^\epsilon((k-1)\epsilon)) - V(y^\epsilon(s))$ a une taille majorée par $\omega(V|_{B(x, \|V\|_\infty)}, \epsilon\|V\|_\infty)$, on voit en sommant sur $0 \leq k \leq n$ qu'on a pour tout entier n

$$\left| y^\epsilon(n\epsilon) - \left(x + \int_0^{n\epsilon} V(y^\epsilon(s))ds \right) \right| \leq n\epsilon \omega(V|_{B(x, \|V\|_\infty)}, \epsilon\|V\|_\infty).$$

Les chemins y^ϵ sont par ailleurs tous $\|V\|_\infty$ -Lipschitz et satisfont $y^\epsilon(0) = x$, aussi la famille $(y^\epsilon)_{0 < \epsilon \leq 1}$ est-elle relativement compacte dans $(C([-1, 1], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ d'après le théorème d'Ascoli. Il s'ensuit que toute limite des y^ϵ lorsque ϵ tend vers 0 est solution de l'équation intégrale

$$y(t) = x + \int_0^t V(y_s)ds.$$

Voyez-vous pourquoi ?

1.2 Espaces $\ell^p(\mathbb{N})$

L'énoncé suivant sera démontré après la Proposition 8.

Théorème – Un sous-ensemble E de $\ell^p(\mathbb{N})$ est compact si et seulement si il existe pour tout $\epsilon > 0$ un entier $n(\epsilon)$ tel que $\sum_{i \geq n(\epsilon)} |x_i|^p \leq \epsilon$ pour tout $(x_i) \in E$.

Soit $\mathbf{a} = (a_i)$ une suite de réels positifs, des poids. On définit $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbf{a}) := \{(x_i) : \sum a_i |x_i|^p < \infty\}$. On munit cet espace d'une norme en posant $\|x\| := (\sum a_i |x_i|^p)^{1/p}$. C'est un espace de Hilbert dans le cas où $p = 2$.

Exercice – On suppose tous les $a_i > 0$ et on pose $\mathbf{a}^{-1} = (a_i^{-1})$. Montrez que l'application $T_{\mathbf{a}}(x) = (\sqrt{a_n} x_n)$ est une isométrie de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbf{a})$ sur $\ell^2(\mathbb{N})$. En déduire que toute forme linéaire continue sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbf{a})$ est de la forme $x \mapsto \sum y_i x_i$ pour $(y_i) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbf{a}^{-1})$.

1.3 Espaces $L^p(\Omega)$

Dans l'esprit du théorème d'Arzela-Ascoli, un énoncé de M. Riesz de 1933 précise quels sont les compacts des espaces L^p .

Théorème (M. Riesz 1933) – Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Une partie fermée $\mathcal{S}$ de $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est compacte si et seulement si (a) elle est bornée, (b) pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ouvert relativement compact Ω_ϵ de Ω telle que $\|f \mathbf{1}_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon}\|_{L^p} \leq \epsilon$ pour toute $f \in \mathcal{S}$, et (c) on peut associer à tout ouvert $U \subset \Omega$ une fonction $\omega_U : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ de limite nulle en 0 telle que $\|f(\cdot + h) - f\|_{L^p(U)} \leq \omega_U(|h|)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$ et tout $h \in \mathbb{R}^d$ assez petit.

Démonstration – Il s'agit de voir qu'on peut recouvrir $\mathcal{S}$ par un nombre fini de boules de $L^p(\Omega)$ de rayon donné arbitraire, disons $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse (b), un recouvrement fini de l'ensemble $\mathcal{S}|_{\Omega_\epsilon}$ des restrictions de $\mathcal{S}$ à Ω_ϵ par des boules de rayon ϵ donnera un recouvrement fini de $\mathcal{S} \subset L^p(\Omega)$ par des boules de rayon 2ϵ .

Soit (ρ_n) une approximation de l'unité à support dans une boule de rayon $1/n$. Soit $n(\epsilon)$ un entier tel que $1/n(\epsilon)$ est plus petit que la distance de Ω_ϵ au bord de Ω . Pour $n \geq n(\epsilon)$ on a $\|\rho_n \star f - f\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \sup_{|h| \leq 1/n} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \epsilon$. Mais la famille $(\rho_n \star f)$ est bornée dans $C(\Omega_\epsilon)$ et équicontinue puisque $|(\rho_n \star f)(x + h) - (\rho_n \star f)(x)| \leq \|\rho_n\|_\infty^{1/p} \|f(\cdot - h) - f\|_{L^p(\Omega)}$. Elle est donc relativement compacte dans $(C(\Omega_\epsilon), \|\cdot\|_\infty)$. Mais comme $\|f\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq |\Omega_\epsilon|^{1/p} \|f\|_{C(\Omega_\epsilon)}$ un recouvrement fini de l'ensemble $(\rho_n \star f)_{n \geq n(\epsilon)} \subset (C(\Omega_\epsilon), \|\cdot\|_\infty)$ par des boules de rayon suffisamment petit induit un recouvrement fini de $(\rho_n \star f)_{n \geq n(\epsilon)} \subset (L^p(\Omega_\epsilon), \|\cdot\|_p)$ par des boules de rayon ϵ . $\square$

1.4 Espaces de Sobolev de fonctions périodiques

On introduit maintenant une famille croissante d'espaces de Hilbert dont on verra aussi qu'ils jouent un rôle fondamental dans l'étude de certaines équations différentielles ou équations aux dérivées partielles. Ces espaces ne sont rien d'autre qu'une incarnation différente des espaces de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbf{a})$ pour certains poids $\mathbf{a}$ particuliers.

(a) Définition. On note $\mathbb{T}^d = \{z = (z_1, \dots, z_d) = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}) ; \theta_i \in [0, 2\pi)\}$ et pour $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ on note $e_k(z) = z_1^{k_1} \cdots z_d^{k_d}$. Les (e_k) forment une famille orthonormée de $C(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$ pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = (2\pi)^{-d} \int f \bar{g}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$ et $f = \sum_{\text{Finie}} \hat{f}(k) z^k$ un polynôme trigonométrique, on définit sa norme de Sobolev s par

$$\|f\|_s \equiv \left(\sum_{\text{Finie}} (1 + |k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Elle est associée au produit scalaire $\langle f, g \rangle_s = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} (1 + |k|^2)^s \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)}$, ce qui fait de l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques un espace pré-hilbertien. On définit $H^s(\mathbb{T}^d)$ comme le complété de $\mathcal{P}$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_s$. C'est une convention d'écriture pratique que d'écrire

$$H^s(\mathbb{T}^d) = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}^d} a_k z^k ; \sum_{k \in \mathbb{N}^d} (1 + |k|^2)^s |a_k|^2 < \infty \right\}.$$

Notez que l'on n'affirme pas ici que la somme converge ponctuellement pour chaque $z \in \mathbb{T}^d$. On a par construction, pour tous $s_2 < s_1$ dans $\mathbb{R}$, l'inclusion continue

$$H^{s_1}(\mathbb{T}^d) \subset H^{s_2}(\mathbb{T}^d).$$

Exercice : Déduire de l'exercice de la section 1.2 qu'on peut associer à toute forme linéaire continue L sur $H^s(\mathbb{T}^d)$ un unique élément $g^L = \sum g_k^L z^k$ de $H^{-s}(\mathbb{T}^d)$ tel que $L(f) = \sum g_k^L f_k$ pour toute $f = \sum f_k z^k \in H^s(\mathbb{T}^d)$.

Pour $1 \leq j \leq d$ on note $D_j = -i\partial_{\theta_j} = z_j \partial_{z_j}$, de sorte que $D_j e_k = k_j e_k$. Tous les opérateurs D_j commutent entre eux. On peut donc définir sans équivoque, pour $p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{N}^d$, l'opérateur différentiel $D^p f = D_1^{p_1} \dots D_d^{p_d} f$; il est d'ordre $|p| \equiv p_1 + \dots + p_d$. Pour un entier $n \geq 0$ et $f \in C^n$ on a

$$\|f\|_n^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} (1 + |k|^2)^n |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{p \in \mathbb{N}^d, |p| \leq n} \binom{n}{|p|} \int |D^p f|^2 \lesssim \max_{p \in \mathbb{N}^d, |p| \leq n} \|D^p f\|_\infty^2$$

en utilisant le fait que $\widehat{D_j f}(k) = k_j \hat{f}(k)$. Cette inégalité montre que $C^n(\mathbb{T}^d) \subset H^n(\mathbb{T}^d)$. On note pour plus tard le fait élémentaire suivant.

Lemme – Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^d$, l'application D^p envoie continûment $H^s(\mathbb{T}^d)$ dans $H^{s-|p|}(\mathbb{T}^d)$.

Démonstration – En effet, l'opération D^p agit en Fourier comme la multiplication par k^p et on a $|k^p| \leq |k|^{|p|}$. $\square$

(b) Injection de Sobolev. Le résultat suivant permet de comparer certains espaces de Sobolev à des espaces C^n .

Théorème (Injections de Sobolev) – Pour $s > d/2$ il existe une constante positive C telle qu'on a pour tout $n \geq 0$ et toute fonction $f \in H^{s+n}(\mathbb{T}^d)$

$$\|f\|_{C^n} \leq C \|f\|_{s+n}.$$

On peut aussi écrire cette inégalité sous la forme de l'injection continue $H^{s+n}(\mathbb{T}^d) \subset C^n(\mathbb{T}^d)$.

Démonstration – On décompose la démonstration sous la forme de deux lemmes élémentaires, dont le premier implique en particulier l'énoncé de Sobolev pour $n = 0$.

Lemme de sommation – Si $s > d/2$ et $\sum (1 + |k|^2)^s |a_k|^2 < \infty$ alors

$$\left| \sum a_k z^k \right| \leq \sum |a_k| \leq \left(\sum (1 + |k|^2)^s |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum (1 + |k|^2)^{-s} \right)^{1/2}.$$

Démonstration – Il s'agit juste de Cauchy-Schwarz et du fait que $\sum (1 + |k|^2)^{-s} < \infty$ si $s > d/2$, par comparaison avec une intégrale sur $\mathbb{R}^d$ et passage en coordonnées polaires. Je vous laisse démontrer le lemme suivant. $\square$

Lemme – Si $\sum |b_k| + \sum k_i |b_k| < \infty$, pour un certain $1 \leq i \leq d$, alors la fonction $f(z) = \sum b_k z^k$ est continue et dérivable dans la direction i avec dérivée partielle continue $(D^i f)(z) = \sum k_i b_k z^k$.

Cet énoncé implique plus généralement que f est de classe C^{p-1} et dérivable p fois avec $(D^p f)(z) = \sum k^p b_k z^k$, pourvu que $\sum |b_k| + \sum k^p |b_k| < \infty$, où $k^p = k_1^{p_1} \dots k_d^{p_d}$. Le lemme de sommation appliqué à $D^p f$ et les $a_k = k^p b_k$ nous dit que $\|D^p f\|_\infty \lesssim_s \left(\sum (1 + |k|^2)^s |a_k|^2 \right)^{1/2}$. Comme $|k^p| \leq |k|^{|p|} \leq (1 + |k|^2)^{n/2}$ si $|p| \leq n$, l'inégalité précédente implique

$$\|D^p f\|_\infty \lesssim_s \left(\sum (1 + |k|^2)^{s+n} |b_k|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_{s+n}.$$

Cela conclut la démonstration. $\square$

On voit en particulier que $C^\infty(\mathbb{T}^d) = \bigcap_{s \geq 0} H^s(\mathbb{T}^d)$ s'identifie avec les séries de Fourier $\sum a_k z^k$ dont les coefficients a_k sont à décroissance rapide : $|k|^r a_k$ tend vers 0 pour tout $r > 0$.

Nous verrons dans l'exemple 1 de la section 5.1 que pour chaque $s_1 < s_2$ le sous-ensemble $H^{s_2}(\mathbb{T}^d)$ de $H^{s_1}(\mathbb{T}^d)$ est compact dans $(H^{s_1}(\mathbb{T}^d), \|\cdot\|_{s_1})$.

(c) Convergence presque partout de séries de Fourier. Notons $S_n(f) = \sum_{|k| \leq n} a_k z^k$ la série de Fourier partielle d'un élément $\sum a_k z^k$ de $H^s(\mathbb{T})$ pour s quelconque. Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ la suite $S_n(f)$ converge dans $L^2(\mathbb{T})$ vers f . Peut-on dire quelque chose sur la convergence de $S_n(f)$ en dehors de ce cadre ? Pour $s > 1/2$ l'injection de Sobolev nous dit que f est continue et que $S_n(f)$ converge uniformément vers f puisque $S_n(f)$ converge vers f dans $H^s(\mathbb{T})$, par construction de cet espace. Peut-on encore dire quelque chose pour $s = 1/2$?

Proposition – Pour $f \in H^{1/2}(\mathbb{T})$ la suite $S_n(f)$ converge presque partout vers f .

Démonstration – Notons $\lambda(A)$ la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{T}$. Notons $r_n = \sum_{|\ell| \geq n} |\ell| |a_\ell|^2$ et $\epsilon_n = r_n^{1/4}$; cette suite décroît vers 0. L'inégalité de Chebychev nous dit que

$$\lambda(\{|S_n(f) - f| > \epsilon_n\}) \leq \epsilon_n^{-2} \|S_n(f) - f\|_{L^2}^2 = \epsilon_n^{-2} \sum_{|k| > n} |a_k|^2.$$

On a donc du fait que ϵ_n décroît la seconde inégalité ci-dessous

$$\sum_{n \geq 0} \lambda(\{|S_n(f) - f| > \epsilon_n\}) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \leq |k|} \epsilon_n^{-2} \right) |a_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \epsilon_{|k|}^{-2} |k| |a_k|^2.$$

La somme majorante est convergente. En effet, comme la suite des ϵ_n^{-2} est croissante et que tous les termes ci-dessous sont positifs, une intégration par partie discrète donne d'après la définition ϵ_n

$$\sum_{p \leq |k| \leq q} \epsilon_{|k|}^{-2} |k| |a_k|^2 = \sum_{p \leq n \leq q} \epsilon_n^{-2} (r_n - r_{n+1}) \leq \epsilon_p^{-2} r_p = r_p^{1/2} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \epsilon_{|k|}^{-2} |k| |a_k|^2 < \infty$, et partant $\sum_{n \geq 0} \lambda(\{|S_n(f) - f| > \epsilon_n\}) < \infty$. On obtient alors la conclusion de la proposition du lemme de Borel-Cantelli. $\square$

Carleson a démontré en 1965 qu'il suffit que $f \in L^2(\mathbb{T})$ pour avoir la convergence presque partout de $S_n(f)$ vers f . Cela lui a valu la médaille Fields en 1966. Hunt a démontré en 1967 qu'il suffit même que $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour un certain $1 < p < \infty$. On savait par contre depuis un résultat de Kolmogorov de 1927 qu'il existe une fonction $L^1(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge partout !

2 Applications linéaires continues

L'objet de l'analyse fonctionnelle est l'étude de fonctions définies sur des espaces fonctionnels. Le cas où ces fonctions sont des applications linéaires est déjà très riche et intéressant. C'est à ce cas particulier qu'est consacré notre cours. Relativement au cas des fonctions non linéaires, le fait qu'une application C^1 soit bien approchée localement par une application linéaire permet de transférer dans certaines circonstances les résultats du cadre linéaire à certains cadres non linéaires. C'est cependant une histoire qu'on ne racontera pas ici.

On introduit dans cette sections quelques notions élémentaires calquées sur leurs analogues d'algèbre linéaire en dimension finie.

Soit $(E, |\cdot|)$ un espace de Banach complexe. On note $\mathbf{B}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans lui-même. On note B_1 la boule unité de E , et $\|\cdot\|_{\text{op}}$ la norme d'opérateur sur $\mathbf{B}(E)$, et E^* l'ensemble des formes linéaires continues sur E . Rappelons que

Définition – La *résolvante* de $T \in \mathbf{B}(E)$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $T - z \equiv T - z \text{Id}$ admet une inverse dans $\mathbf{B}(E)$. Le *spectre* $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ de $T \in \mathbf{B}(E)$ est le complémentaire de sa résolvante.

Comme $T - z$ est continue, si elle est bijective le théorème de l'isomorphisme de Banach donne la continuité automatique de son inverse. Aussi, pour $z \in \sigma(T)$ l'application linéaire $T - z$ est soit non injective soit non surjective. Par exemple, l'opérateur de décalage $(a_0, a_1, \dots) \rightarrow (0, a_0, a_1, \dots)$ sur $\ell^2(\mathbb{N})$ n'est pas surjectif, donc le point 0 est dans son spectre, bien que 0 ne soit pas une valeur propre. De même, l'application $f \in C([0, 1]) \rightarrow \int_0^1 f \in C([0, 1])$, qui fabrique des fonctions C^1 nulles en 0, n'est pas surjective mais n'a aucune fonction propre (démontrez-le).

Proposition – Pour une fonction polynomiale p et $T: E \rightarrow E$ bornée on a $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

Démonstration – Si p est de degré n et $p(z) - \lambda = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$ alors $p(T) - \lambda \text{Id} = a_n \prod_{i=1}^n (T - z_i \text{Id})$. Si donc $\lambda \in \sigma(p(T))$ l'un des z_i est dans $\sigma(T)$, sans quoi $p(T) - \lambda \text{Id}$ serait inversible; mais alors $p(z_i) - \lambda = 0$ et $\lambda \in p(\sigma(T))$. Réciproquement, si $\lambda = p(w_\lambda) \in p(\sigma(T))$ alors w_λ coïncide avec l'un des z_i , l'application $T - z_i \text{Id}$ correspondante n'est pas inversible et $p(T) - \lambda$ non plus. $\square$

On définit le **rayon spectral** de $T \in \mathcal{B}(E)$ par la formule

$$\rho(T) = \sup \{ |z| ; z \in \sigma(T) \}.$$

On a toujours $\rho(T) \leq \|T\|_{\text{op}}$ car si $|z| > \|T\|_{\text{op}}$ alors $\|T/z\|_{\text{op}} < 1$ et l'opérateur $\text{Id} - T/z$ est inversible dans $\mathcal{B}(E)$. Notez qu'on peut avoir une inégalité stricte, déjà en dimension finie : l'endomorphisme nilpotent T de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique a un rayon spectral nul bien que de norme strictement positive, quelle que soit la norme sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1 – On a $\rho(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|_{\text{op}}^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|_{\text{op}}^{1/n}$.

Démonstration – En effet, la fonction

$$\lambda \rightarrow (\lambda \text{Id} - T)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n \geq 0} \lambda^{-n} T^n$$

est holomorphe en dehors du disque de centre 0 et de rayon $\rho(T)$, mais elle n'est pas holomorphe sur le complémentaire d'aucun disque de centre 0 et de rayon strictement plus petit. Cela signifie que la fonction $z \rightarrow (\text{Id} - zT)^{-1}$ est holomorphe sur le disque de rayon $1/\rho(T)$ exactement. La formule d'Hadamard identifie ce rayon de convergence à $1/(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{1/n})$. On obtient que $\limsup = \lim$ du fait de la sous-multiplicativité de la quantité $a_n = \|T^n\|$, qui satisfait $a_{n+m} \leq a_n a_m$ pour tout n, m , et du résultat suivant. $\square$

Lemme (Fekete) – Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs tels que $a_{n+m} \leq a_n a_m$ pour tout n, m . Alors la suite de terme général $a_n^{1/n}$ converge vers son infimum.

Démonstration – Notons ℓ cet infimum. Si l'on avait un $\epsilon > 0$ et une infinité d'indices $(n(p))_{p \geq 1}$ tels que $a_{n(p)}^{1/n(p)} \geq \ell + \epsilon$ pour tous $p \geq 1$, on aurait aussi un entier $m(\epsilon)$ tel que $a_{m(\epsilon)}^{1/m(\epsilon)} < \ell + \epsilon$, et l'on déduirait de la sous-multiplicativité $a_{n(p)} \leq a_{n(1)} a_{m(\epsilon)}^{(n(p)-n(1))/m(\epsilon)}$, ce qui impliquerait pour p assez grand la contradiction $a_{n(p)}^{1/n(p)} \lesssim a_{m(\epsilon)}^{1/m(\epsilon)} < \ell + \epsilon$. $\square$

En dimension finie, où toutes les normes sont équivalents, il s'ensuit de la proposition 1 que $\rho(T)$ est indépendant de la norme utilisée.

Proposition 2 – Pour tout $T \in \mathcal{B}(E)$ et tout $\epsilon > 0$ il existe une norme $|\cdot|'$ sur E équivalente à la norme $|\cdot|$ sur E et telle qu'on a $\|T\|'_{\text{op}} \leq \rho(T) + \epsilon$ pour la norme d'opérateur associée.

Démonstration – On pose $|x|' \equiv \sum_{n \geq 0} \left| \left(\frac{T}{\rho(T) + \epsilon} \right)^n x \right|$, après avoir vérifié que $\sum_{n \geq 0} \left\| \left(\frac{T}{\rho(T) + \epsilon} \right)^n \right\|_{\text{op}} \leq C < \infty$. On a donc $|x| \leq |x|' \leq C|x|$, avec de plus

$$|T(x)|' = \sum_{n \geq 0} \left| \left(\frac{T}{\rho(T) + \epsilon} \right)^n T(x) \right| = (\rho(T) + \epsilon) \sum_{m \geq 1} \left| \left(\frac{T}{\rho(T) + \epsilon} \right)^m x \right| \leq (\rho(T) + \epsilon) |x|'$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

Les résultats de réduction des endomorphismes constituent un élément de base de l'algèbre linéaire en dimension finie. Nous verrons dans la section 5 dans quelle mesure certains de ces résultats admettent des extensions en dimension infinie. Avant d'en venir à ces généralités nous allons regarder en détails deux exemples utiles d'applications linéaires sur certains espaces : la transformée de Fourier dans la section 3 et l'opérateur de convolution dans la section 4.

3 Transformée de Fourier sur les espaces L^p ($1 \leq p \leq 2$)

3.1 Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$

On travaille sur $\mathbb{R}$ dans toute cette section, aussi notons-nous juste L^p plutôt que $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\|\cdot\|_p$ la norme L^p , pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. (Tout ce qui suit admet un analogue direct sur $\mathbb{R}^d$.) Pour $f \in L^1$ on note

$$\mathcal{F}(f)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t x} f(x) dx$$

la transformée de Fourier de f ; c'est une fonction bornée par $\|f\|_{L^1}$.

Une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide si $f \in C^\infty$ et que $|x|^k f^{(n)}(x)$ tend vers 0 in $\pm\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble de ces fonctions.

Exercice 1 – Pour $\lambda = a + ib$ avec $a > 0$, notons $g_\lambda(x) = \exp(-\pi\lambda|x|^2)$. Montrez que $g_\lambda \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{F}(g_\lambda)(t) = \lambda^{-1/2} \exp\left(-\frac{\pi|t|^2}{\lambda}\right)$.

On note

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x t} g(t) dt$$

l'opérateur de transformée de Fourier inverse. Ce n'est pour l'instant qu'une dénomination non justifiée.

Théorème 3 (Fourier) – L'opérateur $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}$ sur lui-même d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$. On a de plus $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2$ pour toute $f \in \mathcal{S}$.

Démonstration – Le fait que $\mathcal{F}$ envoie $\mathcal{S}$ dans C^∞ est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe intégral, dont les hypothèses sont satisfaites.

1. *Formule d'inversion.* Comme

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{2i\pi x t} g(t) dt$$

il suffit, pour obtenir la formule $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$, de voir que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{[-a, a] \times \mathbb{R}} e^{2i\pi t(y-x)} f(y) dt dy = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{[-a, a] \times \mathbb{R}} e^{2i\pi t(y-x)} f(y) dt dy \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi a(y-x))}{y-x} f(y) dy \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi a r)}{r} f(r+x) dr \end{aligned}$$

On découpe cette intégrale en deux. D'un côté on a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin(2\pi a r)}{r} f(r+x) dr = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin(2\pi a r)}{r} (f(r+x) - f(x)) dr + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin(2\pi a r)}{r} dr \right) f(x)$$

avec $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin(2\pi ar)}{r} dr$ qui converge vers 1 lorsque a tend vers $+\infty$. De l'autre on peut écrire

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} \frac{\sin(2\pi ar)}{r} f(r+x) dr + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin(2\pi ar)}{r} (f(r+x) - f(x)) dr = \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi ar) \varphi_x(r) dr$$

pour une fonction $\varphi_x \in L^1$. Le lemme de Riemann² nous dit que cette quantité tend vers 0 lorsque a tend vers ∞ .

2. *Identité de Plancherel.* On a d'après la formule d'inversion

$$\|f\|_2^2 = \int f(x) \overline{f(x)} dx = \int f(x) \left(\int e^{-2i\pi xt} \overline{\mathcal{F}(f)(t)} dt \right) dx.$$

Or, f et $\mathcal{F}(f)$ étant toutes les deux dans $L^2(\mathbb{R})$, la fonction $f(x)e^{-2i\pi xt}\mathcal{F}(f)(t)$ est dans $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, si bien que Fubini nous donne

$$\|f\|_2^2 = \int \overline{\mathcal{F}(f)(t)} \left(\int e^{-2i\pi xt} f(x) dx \right) dt = \int |\mathcal{F}(f)(t)|^2 dt.$$

Cela conclut la démonstration du théorème. $\square$

La fonction $\mathcal{F}(f)$ permet-elle de retrouver la fonction f ? La formule d'inversion répond à cette question fondamentale sur la transformée de Fourier dans le cas particulier où $f \in \mathcal{S}$. La démonstration de la formule d'inversion montre que si f et $\mathcal{F}(f)$ sont toutes les deux dans L^1 alors $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$. Nous verrons plus loin que $\mathcal{F}(f)$ détermine f si $f \in L^1$.

Il s'ensuit³ de l'identité de Plancherel que l'application $\mathcal{F}$ admet une unique extension comme une isométrie de L^2 dans L^2 , d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$. Notez qu'on ne peut pas écrire $\mathcal{F}(f)(s) = \int e^{2i\pi st} f(t) dt$ lorsque $f \in L^2$ puisque cette expression n'a de sens que si f est intégrable.

Exercice – Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur L^2 . On considère ici $\mathcal{F}$ comme un opérateur de L^2 dans lui-même. Pourquoi a-t-on $\langle \mathcal{F}(f), g \rangle = \langle f, \mathcal{F}(g) \rangle$ pour tout $f, g \in L^2$? Voyez-vous pourquoi la formule d'inversion de Fourier implique que $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$? Pourquoi en déduit-on que $\sigma(\mathcal{F}) \subset \{1, i, -1, -i\}$? Pourquoi i et $-i$ ne sont-ils pas des valeurs propres de $\mathcal{F}$? L'identité de Plancherel implique que -1 ne peut pas non plus être une valeur propre : pourquoi ? Connaissez-vous une fonction propre associée à l'éventuelle valeur propre 1 ?

2. Cet énoncé se démontre par exemple par un argument d'approximation dans L^1 : $\mathcal{F}(g)(t)$ décroît comme $1/t$ lorsque g est C^1 et $\|\mathcal{F}(f-g)\|_\infty \leq \|f-g\|_1$, soit en notant que

$$\mathcal{F}(f)(t) = - \int e^{-2i\pi tx - i\pi} f(x) dx = - \int f\left(y - \frac{1}{2t}\right) e^{-2i\pi ty} dy,$$

après changement de variable $y = x + \frac{1}{2t}$, pour $t \neq 0$. Il s'ensuit de cette inégalité que $2|\mathcal{F}(f)(t)| \leq \left\| f(\cdot) - f\left(\cdot - \frac{1}{2t}\right) \right\|_1$, avec un majorant qui tend vers 0 lorsque t tend vers ∞ . C'est là encore un argument d'approximation qui justifie cette assertion : si $g \in C_c^\infty$ est ϵ -proche de f dans L^1 , avec g à support dans l'intervalle $[-a, a]$, on a $\left\| f(\cdot) - f\left(\cdot - \frac{1}{2t}\right) \right\|_1 \leq 2\epsilon + \left\| g(\cdot) - g\left(\cdot - \frac{1}{2t}\right) \right\|_1 \leq 2\epsilon + \frac{\|g'\|_\infty}{2t} 2a$, ce qui donne $\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| f(\cdot) - f\left(\cdot - \frac{1}{2t}\right) \right\|_1 \leq 2\epsilon$, et comme ϵ est quelconque...

3. On est ici dans une situation typique : on a deux espaces de Banach $(E, |\cdot|_E)$, $(F, |\cdot|_F)$ et des sous-espaces E_1 , F_1 de E et F respectivement, ainsi qu'une application T définie de E_1 dans F_1 pour laquelle il existe une constante $c \in (0, \infty)$ telle que $|T(e_1)|_F \leq c|e_1|_E$ pour tout $e_1 \in E_1$. L'application linéaire T admet alors une unique extension $\bar{T}$ continue sur E tout entier. En effet, pour $e \in E \setminus E_1$ et une suite (e_1^n) de E_1 convergeant vers e la suite de $T(e_1^n)$ satisfait $|T(e_1^n) - T(e_1^m)|_F \leq c|e_1^n - e_1^m|_E$; elle est donc de Cauchy. On définit $\bar{T}(e)$ comme sa limite. On obtient que $|\bar{T}(e)|_F \leq c|e|_E$ en passant à la limite dans l'inégalité $|T(e_1^n)|_F \leq c|e_1^n|_E$.

Remarque – On n’a pas en pratique accès à des mesures parfaites de $f \in \mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. Soit $w \in \mathcal{S}$ une fonction de norme L^2 égale à 1 – on note w pour ‘window’ ; pensez par exemple à une gaussienne de variance 1. On définit pour chaque $a \in \mathbb{R}$ la fonction $\mathcal{F}_w(f)(s, a) \equiv \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi st} w(t - a) f(t) dt$. Ce type de transformations a été introduit par Gabor (Nobel de physique en 1971) vers 1940.

Théorème (Gabor) – L’application $\mathcal{F}_w: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est une isométrie sur son image : $\iint |\mathcal{F}_w(f)|^2(s, a) ds da = \int |f|^2(t) dt$, qui permet de retrouver $f: f(t) = \iint e^{2i\pi st} w(t - a) \mathcal{F}_w(f)(s, a) da ds$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration – Puisque $w(\cdot - a) f \in \mathcal{S}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ la formule de Plancherel nous dit que $\int |\mathcal{F}_w(f)|^2(\cdot, a) = \int |(\cdot)|^2 |w(\cdot - a)|^2$. Il suffit alors d’intégrer en a et d’utiliser le fait que $\|w\|_{L^2} = 1$ pour obtenir l’identité d’isométrie. Pour l’autre identité, on note que $f w(\cdot - a) \in \mathcal{S}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, aussi a-t-on $\int e^{2i\pi ts} \mathcal{F}_w(f)(s) ds = f(t) w(t - a)$ d’après la formule d’inversion de Fourier et la définition de $\mathcal{F}_w(f)$. La formule s’ensuit en multipliant par $w(t - a)$ et en intégrant en a . $\square$

3.2 Principes d’incertitudes

La transformation de Fourier est un opérateur borné de L^1 dans L^∞ . La démonstration de la formule d’inversion donnée ci-dessus montre que si f et $\mathcal{F}(f)$ sont toutes les deux dans L^1 alors $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$. La continuité de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ de L^1 dans L^∞ s’écrit

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq c_0 \|f\|_1, \quad \|\mathcal{F}^{-1}(g)\|_\infty \leq c_0 \|g\|_1.$$

Si l’on applique ces estimées à f et $g = \mathcal{F}(f)$ on obtient l’inégalité

$$\frac{\|f\|_1}{\|\mathcal{F}(f)\|_\infty} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_1}{\|f\|_\infty} \geq c_0^{-2}$$

c’est-à-dire

$$L_o(f) L_o(\mathcal{F}(f)) \geq c_0^{-2}, \quad \text{avec} \quad L_o(f) \equiv \frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty}.$$

On voit dans L_o un opérateur qui quantifie le caractère *localisé* ou non de $f \in \mathcal{S}$. (D’où le choix de lettre ‘ L ’ pour cet opérateur.) Voici un exemple élémentaire d’une inégalité similaire à la précédente, due à Heisenberg. On note xg la fonction $x \rightarrow xg(x)$, pour toute fonction g .

Théorème (Heisenberg) – Pour toute $f \in \mathcal{S}$ on a $\frac{\|xf\|_2}{\|f\|_2} \frac{\|t\mathcal{F}(f)\|_2}{\|\mathcal{F}(f)\|_2} \geq \frac{1}{4\pi}$.

Puisque $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ d’après Plancherel, on peut ré-écrire l’inégalité de Heisenberg sous la forme

$$\|xf\|_2 \|t\mathcal{F}(f)\|_2 \geq \frac{\|f\|_2^2}{4\pi}.$$

Notez que $2\pi \|t\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f'\|_2$. On obtient donc le résultat d’une simple intégration par parties $\int |f|^2 = -\int xf\bar{f}' - \int x f' \bar{f}$, en appliquant ensuite l’inégalité de Cauchy-Schwarz. Démontrez qu’une gaussienne de variance 1 réalise l’égalité dans l’inégalité de Heisenberg.

Tout opérateur $L(\cdot)$ qui vérifie

$$L(f) \geq c_1 L_o(f)^\alpha$$

pour toute $f \in \mathcal{S}$, pour une certaine constant c_1 et un exposant $\alpha \in (0, +\infty)$, satisfait en particulier l’inégalité

$$L(f)L(\mathcal{F}(f)) \geq (c_1/c_0^\alpha)^2.$$

Si $L(f)$ quantifie aussi le caractère localisé de f , l'inégalité précédente quantifie l'impossibilité pour f et $\mathcal{F}(f)$ d'être toutes deux 'très' localisées. On appelle *principes d'incertitude* de telles inégalités ; en voici deux exemples.

Exemples – (a) Je note $\lambda(A)$ la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$ et note l'estimée immédiate : $\lambda(\text{supp}(g)) \geq \frac{\|g\|_1}{\|g\|_\infty}$. Il s'ensuit que pour toute $f \in \mathcal{S}$ on a

$$\lambda(\text{supp}(g))\lambda(\text{supp}(\mathcal{F}(f))) \geq 1.$$

On comparera cet énoncé au théorème de Donoho & Stark de la section 8, qui ne demande pas à f et $\mathcal{F}(f)$ d'avoir des supports de mesures finies.

(b) On a pour toute $g \in \mathcal{S}$ et $1 < q \leq \infty$ on a $\frac{\|g\|_1}{\|g\|_q} \geq \left(\frac{\|g\|_1}{\|g\|_\infty}\right)^{1-1/q}$, du fait que $\|g\|_q^q \leq \|g\|_\infty^{q-1}\|g\|_1$. Il s'ensuit que pour toute $f \in \mathcal{S}$ on a

$$\frac{\|f\|_1}{\|f\|_q} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_1}{\|\mathcal{F}(f)\|_q} \geq c_0^{2/q-2}.$$

Dans la même veine, on a⁴ une constante explicite c_q telle que

$$\frac{\|xg\|_2}{\|g\|_q^2} \geq c_q \left(\frac{\|g\|_1}{\|g\|_q}\right)^{\frac{3q-2}{q-1}}$$

pour toute $g \in \mathcal{S}$. On déduit en déduit le principe d'incertitude

$$\frac{\|xf\|_2}{\|f\|_q^2} \frac{\|x\mathcal{F}(f)\|_2}{\|\mathcal{F}(f)\|_q^2} \geq c'_q$$

pour une certaine constante explicite c'_q indépendante de $f \in \mathcal{S}$. On retrouve le théorème 3 lorsque $q = 2$.

Toutes les inégalités précédentes quantifient le fait qu'on ne peut pas avoir à la fois f et sa transformée de Fourier toutes deux localisées, en un sens qui dépend de chaque situation. Voici pour terminer cette section une version non quantifiée du fait qu'on ne peut avoir $f \in C(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f)$ toutes deux à support compact que si f est nulle. En effet, si $f \in C_c(\mathbb{R})$ la fonction $\phi(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{itz} f(t) dt$ définit sur $\mathbb{C}$ une fonction holomorphe, qui serait donc nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$ pour $a > 0$ assez grand si $\mathcal{F}(f)$ était à support compact. La fonction ϕ devrait donc être identiquement nulle d'après le principe des zéros isolés, ce qui impliquerait $f = 0$ d'après la formule d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}$.

3.3 Signaux à spectres bornés

On s'intéresse à l'ensemble L_*^2 des fonctions L^2 dont la transformée de Fourier s'annule presque partout en dehors d'un intervalle donné, disons l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. (Montrez qu'on peut toujours se ramener à considérer cet intervalle-là.)

Exercice – Montrez que l'espace L_*^2 est fermé dans L^2 , donc complet.

Proposition 4 – Si $f \in L_*^2$ alors f est continue et nulle à l'infini, et $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$.

4. On note que $\int_{-a}^a |g| \leq (2a)^{1-1/q} \|g\|_q = \|g\|_1/2$ pour le choix approprié de a en fonction de g . Pour ce choix-là on a donc $\|g\|_1/2 \leq \int_{|x|>a} |g(x)| dx \leq \left(\int_{|x|>a} x^{-2} dx\right)^{1/2} \left(\int_{|x|>a} x^2 g(x)^2 dx\right)^{1/2} \leq (2/a)^{1/2} (\int x^2 g(x)^2 dx)^{1/2}$, ce qui est l'inégalité donnée avec $c_q = 2^{\frac{4-5q}{q-1}}$.

Démonstration – On a $\mathcal{F}(f) \in L^2$ et presque partout nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$. On a donc d'après la formule d'inversion de Fourier $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(y) e^{2i\pi xy} dy$, et le lemme de Riemann nous dit que f s'annule à l'infini. L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité de Plancherel nous donnent alors

$$|f(x)| \leq \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2([-1/2, 1/2])} = \|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$$

ce qui clôt la démonstration. $\square$

La fonction sinus-cardinal est définie comme la transformée de Fourier de l'indicatrice de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Elle est C^∞ , égale à 1 en $x = 0$ et $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, pour $x \neq 0$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $\text{sinc}_k(x) = \text{sinc}(x - k)$. C'est la transformée de Fourier de la fonction $e_k(y) \equiv e^{2i\pi ky} \mathbf{1}_{|y| \leq 1/2}$.

Proposition 5 – La famille des $(\text{sinc}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de L^2_* .

Démonstration – Elle forme une famille orthonormée comme on a d'après Plancherel

$$\langle \text{sinc}_k, \text{sinc}_\ell \rangle_{L^2} = \langle e_k, e_\ell \rangle_{L^2} = \delta_{k, \ell}.$$

Une fonction f de L^2_* qui serait orthogonale à toutes les $(\text{sinc}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aurait une transformée de Fourier orthogonale à toutes les $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$; c'est là encore Plancherel. Cela impliquerait que $\mathcal{F}(f)$ serait nulle presque partout, puisque les $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de L^2_* , et donc que f est nulle. $\square$

Théorème (d'échantillonnage) – L'application de L^2_* dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui associe à f la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie, et on a $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \text{sinc}_k$, la série convergeant uniformément et dans L^2 pour toute fonction $f \in L^2_*$.

Démonstration – On a d'après la proposition précédente $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \text{sinc}_k \rangle \text{sinc}_k$, avec convergence L^2 , donc uniforme, d'après la proposition 4. Le résultat provient de ce que $\text{sinc}_k(n) = \delta_k(n)$. $\square$

3.4 Interpolation et extension de $\mathcal{F}$ aux L^p avec $1 \leq p \leq 2$

Exercice 2 – On se demande si la transformation de Fourier est un opérateur continu de L^p dans L^r pour certains couples (p, r) . Montrez que $\|\mathcal{F}(f)\|_r / \|f\|_p$ peut être rendu arbitrairement grand si $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \neq 1$.

Exercice 3 – En utilisant les gaussiennes g_λ de l'exercice 1 montrez qu'il n'est pas vrai que $\mathcal{F}$ envoie continûment L^p dans L^q , avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, lorsque $p > 2$.

Un résultat d'interpolation prend typiquement la forme suivante. On dispose des deux familles d'espaces $(X_a)_{0 \leq a \leq 1}$ et $(Y_a)_{0 \leq a \leq 1}$ et d'un opérateur qui est continu de X_0 dans Y_0 , ainsi que de X_1 dans Y_1 . Sous des conditions ad hoc, cet opérateur est aussi continu de X_a dans Y_a pour tout $0 < a < 1$.

(a) Interpolation complexe. Le résultat suivant est un résultat d'interpolation dont la démonstration s'appuie sur le principe du maximum satisfait par les fonctions holomorphes.

Théorème (Riesz (1926) – Thorin⁵ (1938)) – Soit T un opérateur linéaire borné de L^{p_1} dans L^{r_1} , mais aussi borné de L^{p_2} dans L^{r_2} . Alors T est aussi un opérateur borné de L^p dans L^r pour $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$ et $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{r_1} + \frac{1-\alpha}{r_2}$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$ quelconque.

Démonstration – Notons r' l'exposant conjugué de r . Notons $0 < C < +\infty$ le maximum des normes de T en tant qu'opérateur de L^{p_1} dans L^{r_1} et de L^{p_2} dans L^{r_2} . On souhaite estimer $\int T(f)g$ pour $f \in L^p$ et $g \in L^{r'}$. On suppose pour commencer que $f = \sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$ et $g = \sum b_j \mathbf{1}_{B_j}$, pour des sommes finies, avec a_i, b_j non nulles. On définit des familles holomorphes de fonctions

$$f_z(\cdot) = \sum a_i^{az+b} \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{et} \quad g_z(\cdot) = \sum b_j^{cz+d} \mathbf{1}_{B_j}$$

5. Riesz a d'abord démontré son résultat en 1926, avec des méthodes différentes de celles que son étudiant Thorin a utilisé ensuite.

pour des constantes a, b, c, d qu'on choisira dans un moment. La fonction $h(z) = \int T(f_z)g_z$ est holomorphe, et le choix $a = p/p_1$, $b = p/p_0$, $c = r/r_1$, et $d = r/r_0$, assure qu'on a conjointement

- (a) $f_z \in L^{p_1}, g_z \in L^{r_1'}$ lorsque $\operatorname{Re}(z) = 0$ car $|f_z|^{p_1} = |f|^p$ et $|g_z|^{r_1'} = |g|^{r'}$ dans ce cas,
- (b) $f_z \in L^{p_2}, g_z \in L^{r_2'}$ lorsque 1 car $|f_z|^{p_2} = |f|^p$ et $|g_z|^{r_2'} = |g|^{r'}$ dans ce cas.

Les relations entre p_1, p_2, p et r_1, r_2, r assurent de plus que $(1-b)/a = (1-d)/c$. On note t ce nombre réel, qui satisfait donc $at + b = 1$ et $ct + d = 1$, et partant $h(t) = \int T(f)g$. On a $t \in [0, 1]$.

Les points (a) et (b) impliquent que la fonction h est bornée par $C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{r'}}$ sur les deux lignes verticales $\operatorname{Re}(z) \in \{0, 1\}$. Il s'ensuit du principe du maximum que $|h|$ est aussi bornée par $C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{r'}}$ à l'intérieur du domaine $\operatorname{Re}(z) \in [0, 1]$, en particulier pour $z = t$. Cela montre le résultat pour f et g simples. Il s'ensuit de la densité des fonctions simples dans les ensembles L^p et $L^{r'}$ que l'inégalité $|\int T(f)g| \leq C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{r'}}$ a lieu pour toutes fonctions $f \in L^p$, $g \in L^{r'}$. $\square$

Corollaire – Pour tout $\alpha \in [0, 1)$ l'opérateur $\mathcal{F}$ est bornée de $L^{\frac{2}{1+\alpha}}$ dans $L^{\frac{2}{1-\alpha}}$.

Voici un autre exemple d'utilisation du théorème de Riesz-Thorin.

Proposition – Soit $\mathbf{P}$ un opérateur linéaire tel que $\int (\mathbf{P}f)g = \int f(\mathbf{P}g)$ et $\|\mathbf{P}f\|_{2k} \leq k\|f\|_{2k}$ pour tout polynômes trigonométriques f, g sur $\mathbb{T}$ et tout entier $k \geq 1$. Alors pour tout $1 < p < \infty$ l'opérateur $\mathbf{P}$ s'étend en un opérateur continu tel que $\|\mathbf{P}f\|_p \leq \max(p, q)\|f\|_p$.

Démonstration – Pour $2k \leq p < 2(k+1)$ le théorème de Riesz-Thorin nous assure que $\mathbf{P}$ s'étend en un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{T})$, de norme au plus $k^\alpha(k+1)^{1-\alpha} \leq p$, pour une constante α dépendant de k et p . Cela montre le résultat lorsque $p \geq 2$. Pour $1 < p < 2$, et puisqu'on a $\int (\mathbf{P}f)g = \int f(\mathbf{P}g)$ pour tous polynômes trigonométriques f, g on a

$$\|\mathbf{P}f\|_p = \sup_{\|g\|_q=1} \int (\mathbf{P}f)g = \sup_{\|g\|_q=1} \int f(\mathbf{P}g) \leq \|f\|_p \sup_{\|g\|_q=1} \|\mathbf{P}g\|_q \leq q\|f\|_p.$$

Cela montre le résultat lorsque $1 < p < 2$. $\square$

Notons

$$\mathbf{P}f := \sum_{n \geq 0} f_n e^{in\theta}$$

pour tout polynôme $f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\theta}$.

Proposition – Cette application satisfait les hypothèses de la proposition précédente.

Démonstration – Notons $\mathbf{P}_\perp f = f - \mathbf{P}f$; il est clair que $(\mathbf{P}f)^k \perp_{L^2} (-\mathbf{P}_\perp f)^k$. Puisque $\|\mathbf{P}f\|_{2k}^k = \|(\mathbf{P}f)^k\|_2$ on peut écrire

$$\|\mathbf{P}f\|_{2k}^k \leq \|(\mathbf{P}f)^k - (\mathbf{P}_\perp f)^k\|_2 = \left\| f \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j (\mathbf{P}f)^{k-j} (\mathbf{P}_\perp f)^j \right\|_2.$$

L'inégalité de Hölder nous donne donc

$$\|\mathbf{P}f\|_{2k}^k \leq \|f\|_{2k} \sum_{j=0}^{k-1} \|(\mathbf{P}f)^{k-j} (\mathbf{P}_\perp f)^j\|_{\frac{2k}{k-1}} \leq \|f\|_{2k} \sum_{j=0}^{k-1} \|\mathbf{P}f\|_{2k}^{k-1-j} \|\mathbf{P}_\perp f\|_{2k}^j.$$

Le résultat s'ensuit si $\|\mathbf{P}f\|_{2k} \geq \|\mathbf{P}_\perp f\|_{2k}$. Si on a au contraire $\|\mathbf{P}f\|_{2k} \leq \|\mathbf{P}_\perp f\|_{2k}$ le même raisonnement que précédemment appliqué à $\mathbf{P}_\perp f$ plutôt qu'à $\mathbf{P}f$ donne $\|\mathbf{P}_\perp f\|_{2k} \leq k\|f\|_{2k}$ et donc la conclusion. $\square$

(b) Interpolation réelle. On peut utiliser comme alternative à l'énoncé de Riesz-Thorin un résultat de Marcinkiewicz (1939) dont les ressorts de la démonstration sont différents et n'utilisent pas d'analyse complexe. Notons $|A|$ la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$. Pour $1 \leq p < \infty$ on note $f \in L_\star^p$ si

$$[f]_{p\star} \equiv \left(\sup_{t>0} t^p |\{ |f| > t \}| \right)^{1/p} < \infty.$$

Il est pratique de noter $\lambda_f(t) \equiv |\{ |f| > t \}|$. On a $[f]_{p\star} \leq \|f\|_p$ et Fubini donne

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t) dt. \quad (1)$$

Théorème (Marcinkiewicz) – Soit $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ et T un opérateur linéaire tel que

$$[T(f)]_{p_i\star} \leq C[f]_{p_i\star}, \quad (\forall f \in L^{p_i}, 1 \leq i \leq 2)$$

pour une constante finie C . Alors T envoie continument L^p dans lui-même pour tout $p \in (p_1, p_2)$.

Démonstration – Il n'y a rien d'autre que Fubini. Pour $g \in L^p$, et $t > 0$, notons $g_t^1 = g \mathbf{1}_{|g|>t}$ et $g_t^2 = g \mathbf{1}_{|g|\leq t}$, si bien que $g = g_t^1 + g_t^2$, avec $g_t^1 \in L^{p_1}$ et $g_t^2 \in L^{p_2}$. Puisque T est linéaire on a

$$\{|T(g)| > t\} \subset \left\{ |T(g_t^1)| > \frac{t}{2} \right\} \cup \left\{ |T(g_t^2)| > \frac{t}{2} \right\}$$

si bien que

$$\lambda_{T(g)}(t) \leq \lambda_{T(g_t^1)}\left(\frac{t}{2}\right) + \lambda_{T(g_t^2)}\left(\frac{t}{2}\right) \lesssim [g_t^1]_{p_1\star}^{p_1} \left(\frac{2}{t}\right)^{p_1} + [g_t^2]_{p_2\star}^{p_2} \left(\frac{2}{t}\right)^{p_2} \lesssim \|g_t^1\|_{p_1}^{p_1} \left(\frac{2}{t}\right)^{p_1} + \|g_t^2\|_{p_2}^{p_2} \left(\frac{2}{t}\right)^{p_2}.$$

La formule (1) nous dit donc que

$$\|T(g)\|_p^p \lesssim_{p_1, p_2} \int_0^\infty t^{p-1-p_1} \|g_t^1\|_{p_1}^{p_1} dt + \int_0^\infty t^{p-1-p_2} \|g_t^2\|_{p_2}^{p_2} dt.$$

Mais Fubini nous donne

$$\int_0^\infty t^{p-1-p_1} \|g_t^1\|_{p_1}^{p_1} dt = \int_0^\infty \int \mathbf{1}_{|g|>at} t^{p-1-p_1} |g(x)|^{p_1} dx dt = \frac{1}{p-p_1} \int |g|^p$$

avec un calcul analogue pour l'autre intégrale. Cela montre que $\|T(g)\|_p^p \lesssim \|g\|_p^p$. $\square$

Une variation sur ce schéma de démonstration donne le résultat suivant, comparable au résultat de Riesz-Thorin.

Théorème (Marcinkiewicz) – Soit $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ et $q_1 \in (p_1, \infty)$, $q_2 \in (p_2, \infty)$, ainsi que $\alpha \in (0, 1)$. On définit p_θ et q_θ par les relations $\frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$ et $\frac{1}{q_\theta} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}$. Soit T un opérateur linéaire tel que $[T(f)]_{q_1\star} < \infty$ pour toute $f \in L^{p_1}$, et tel que $[T(f)]_{q_2\star} < \infty$ pour toute $f \in L^{p_2}$. Alors pour toute $g \in L^{p_\theta}$ on a $T(g) \in L^{q_\theta}$.

3.5 Distributions tempérées et leurs transformées de Fourier

Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ et $k \in \mathbb{N}$ quelconque, on note

$$\|\varphi\|_{k, \ell} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k \varphi^{(\ell)}(x)|.$$

On dit que $\varphi_n \in \mathcal{S}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{S}$ si $\|\varphi_n - \varphi\|_{k, \ell}$ tend vers 0 pour tous k, ℓ .

Exercice (a) – Pour $\varphi \in \mathcal{S}$ on note $(ix)^k \varphi$ la fonction $x \rightarrow (ix)^k \varphi(x)$. On a par convergence dominée $\partial^k \mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}((ix)^k \varphi)$. Utilisez ce fait pour montrer qu'on a : $\|\mathcal{F}(\varphi_n) - \mathcal{F}(\varphi)\|_{k,\ell} \rightarrow 0$ pour tous k, ℓ si $\varphi_n \in \mathcal{S}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{S}$. En d'autres termes : la transformée de Fourier est une bijection continue de $\mathcal{S}$ dans lui-même d'inverse continu : c'est un homéomorphisme.

Une *forme linéaire* Λ sur $\mathcal{S}$ est dite *continue* si $\Lambda(\varphi_n)$ converge vers $\Lambda(\varphi)$ dès que $\varphi_n \in \mathcal{S}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{S}$. On appelle **distributions tempérées** de telles formes linéaires sur $\mathcal{S}$.

Exemples – 1. L'*exemple fondamental* : une fonction $f \in L^1$ définit une distribution tempérée

$$\Lambda_f(\varphi) \equiv \int_{\mathbb{R}} f\varphi.$$

Exercice (b) – Montrez que la formule précédente définit pour toute fonction f à croissance au plus polynomiale une distribution tempérée.

2. Voici d'autres exemples : $\Lambda(\varphi) = \varphi^{(2)}(1)$, $\Lambda(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f\varphi^{(3)}$, $\Lambda(\varphi) = \varphi(0)$, $\Lambda(\varphi) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ et, pour une distribution tempérée quelconque Λ , on pose $\Lambda^{(k)}(\varphi) \equiv (-1)^k \Lambda(\varphi^{(k)})$.

La **transformée de Fourier d'une distribution tempérée** $\Lambda \in \mathcal{S}'$ est définie par la relation

$$\mathcal{F}(\Lambda)(\varphi) \equiv \Lambda(\mathcal{F}(\varphi)).$$

L'exercice (a) montre que $\mathcal{F}(\Lambda)$ est une distribution tempérée. On voit en conséquence de la formule d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}$ que $\mathcal{F}$ est inversible, d'inverse

$$\mathcal{F}^{-1}(\Lambda)(\varphi) \equiv \Lambda(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)).$$

Puisque $\mathcal{F}$ est une bijection continue de $\mathcal{S}$ dans lui-même d'inverse continu, $\mathcal{F}$ est une bijection continue de $\mathcal{S}'$ dans lui-même d'inverse continu : c'est un homéomorphisme.

Exemple – 3. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Notons

$$\mathcal{F}(\mu)(x) \equiv \int e^{-2i\pi xy} \mu(dy)$$

la fonction caractéristique de μ . C'est une fonction continue et bornée de $x \in \mathbb{R}$. La forme linéaire $L_\mu : (f \in \mathcal{S}) \rightarrow \int f d\mu$ est une distribution tempérée. Puisque $((x, y) \rightarrow \varphi(x)e^{-2i\pi yx}) \in L^1(\text{Leb} \otimes \mu)$, on peut utiliser Fubini pour voir que

$$\mathcal{F}(L_\mu)(\varphi) = \int \mathcal{F}(\varphi) d\mu = \int \left(\int e^{-2i\pi yx} \varphi(x) dx \right) \mu(dy) = \int \varphi(x) \mathcal{F}(\mu)(x) dx = L_{\mathcal{F}(\mu)}(\varphi).$$

L'application $\mathcal{F}$ étant une bijection de $\mathcal{S}'$ dans lui-même, on voit ainsi que la fonction caractéristique $\mathcal{F}(\mu) \in C_b$ de μ caractérise uniquement la distribution L_μ .

4 Opérateur de convolution sur les espaces L^p

L'opérateur de convolution est initialement défini sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ par la formule

$$(f \star g)(x) = \int f(x-y)g(y) dy.$$

Justifiez qu'il est à valeurs dans $\mathcal{S}$ et que $f \star g = g \star f$.

Exercice – Justifiez qu'il est à valeurs dans $\mathcal{S}$ et que $f \star g = g \star f$. Montrez que $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$ pour toutes f, g de $\mathcal{S}$; montrez que cette formule s'étend à $f \in L^1$ et $g \in \mathcal{S}$.

4.1 Synthèse spectrale

Pour $\sigma > 0$ on note $g_\sigma(t) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$ la densité d'une gaussienne centrée de variance σ^2 . On rappelle que la famille des $(g_\sigma)_{\sigma>0}$ forme une approximation de l'unité :

$$\|f \star g_\sigma - f\|_{L^p} \rightarrow 0$$

lorsque σ tend vers 0, pour toute fonction $f \in L^p$ où $1 \leq p \leq 2$. L'énoncé suivant montre que l'on peut retrouver $f \in L^p$ à partir de sa transformée de Fourier. Pour $f \in L^1 \cap L^p$ et $\sigma > 0$ notons pour tous $x \in \mathbb{R}$

$$f_\sigma(x) = \int e^{2i\pi xt} \mathcal{F}(f)(t) e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt.$$

Théorème (Synthèse spectrale) – Pour $f \in L^1 \cap L^p$ on a $f_\sigma \in L^p$ et $\|f_\sigma - f\|_{L^p}$ tend vers 0 lorsque σ tend vers 0.

On a en particulier $f = 0$ dès lors que $f \in L^1 \cap L^p$ avec $1 \leq p \leq 2$ et $\mathcal{F}(f) = 0$.

Démonstration – Puisque g_σ est paire on a d'après la formule d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}$

$$(f \star g_\sigma)(x) = \int g_\sigma(y-x) f(y) dy = \int f(y) \left(\int e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{2i\pi t(x-y)} dt \right) dy.$$

Comme $f \in L^p$ la fonction $(t, y) \rightarrow f(y) e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ est dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; on peut donc appliquer le théorème de Fubini à l'expression précédente. Cela donne $(f \star g_\sigma)(x) = f_\sigma(x)$. $\square$

4.2 Propriétés de continuité de l'opérateur de convolution

On cherche à étendre l'opérateur de convolution à des couples $(f, g) \in L^{p_1} \times L^{p_2}$, pour certains exposants d'intégrabilité (p_1, p_2) à déterminer. On note ci-dessous C_0 l'espace des fonctions continues de limites nulles à l'infini. Voici un premier résultat.

Théorème 6 – L'opérateur de convolution $\star$ admet les extensions continues suivantes :

- (1) de $L^p \times L^q$ dans C_0 , pour $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;
- (2) de $L^1 \times L^\infty$ dans C_b ;
- (3) de $L^1 \times L^1$ dans L^1 .

Démonstration – Pour $a \in \mathbb{R}$ et une fonction quelconque f on note $f_a(x) = f(x-a)$. On va utiliser deux faits élémentaires : C_c^∞ est dense dans L^p pour $1 < p < \infty$, et pour $f \in L^r$ donnée ($1 \leq r < \infty$) l'application de translation $a \rightarrow f_a \in L^r$ est uniformément continue. (Démontrez ces faits.)

Pour démontrer l'item (1) il suffit de voir qu'on l'inégalité

$$\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{2}$$

que $f \star g$ est continue et qu'elle tend vers 0 à l'infini. L'inégalité (1) vient de Hölder, la continuité vient de la continuité des translations. On vérifie directement que $f \star g$ est à support compact, donc tend vers 0 à l'infini, si f et g sont dans C_c^∞ . Associons à un $\epsilon > 0$ donné des fonctions $f_1 \in C_c^\infty$ et $g \in C_c^\infty$ proches de f et g dans L^p et L^q respectivement. On conclut en écrivant

$$(f \star g)(x) = ((f - f_1) \star g)(x) + (f_1 \star (g - g_1))(x) + (f_1 \star g_1)(x),$$

comme les deux premiers termes sont de taille $O(\epsilon)$, d'après l'estimée de continuité (1), et le troisième terme est nul si $|x|$ est assez grand.

(2) Ce dernier point tombe en défaut pour l'estimée $L^1 \times L^\infty$ comme C_c^∞ n'est pas dense dans L^∞ . Le reste du raisonnement s'applique.

(3) Enfin, l'inégalité $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ est immédiate. $\square$

Le résultat d'interpolation de Riesz-Thorin permet d'affiner ces résultats à peu de frais.

Théorème (Young (1912)) – Pour tous $p_1, p_2 \in (1, \infty)$ l'opérateur de convolution envoie continûment $L^{p_1} \times L^{p_2}$ dans L^r où $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{r}$.

Démonstration⁶ – Les estimées $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ et $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ nous disent que l'opérateur $g \rightarrow f \star g$ est dans $\mathbf{B}(L^1) \cap \mathbf{B}(L^\infty)$ et de norme au plus $\|f\|_1$ dans ces deux espaces. Il définit par interpolation un élément de $\mathbf{B}(L^{p_2})$: $\|f \star g\|_{p_2} \leq \|f\|_1 \|g\|_{p_2}$, de norme au plus $\|f\|_1$. Cette inégalité nous dit d'ailleurs que l'opérateur de convolution avec $g \in L^{p_2}$ est borné de L^1 dans L^{p_2} . Comme c'est aussi un opérateur continu de L^{q_2} dans L^∞ , où $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1$, d'après Hölder, une nouvelle application du résultat d'interpolation donne l'énoncé du théorème. $\square$

4.3 Sous-espaces de L^2 et L^1 invariants par translations

Un sous-espace de fonctions $\mathcal{A}$ est dit *invariant par les translations* si $f \in \mathcal{A}$ implique que la fonction $f(\cdot + t) \in \mathcal{A}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On commence par une proposition élémentaire sur les sous-espaces de L^2 invariants par translations. Pour $A \subset \mathbb{R}$ on note $L^2[A]$ le sous-espace fermé de L^2 des fonctions nulles presque partout en dehors de A . L'espace $L^2[A]$ s'identifie naturellement à $L^2(A)$.

Proposition – On peut associer à tout sous-espace fermé $\mathcal{A}$ de L^2 invariant par les translations un sous-ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{A} = \{f \in L^2; \mathcal{F}(f) \in L^2[A]\}.$$

Démonstration – Il s'agit de voir que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{A}) = L^2[A]$. Soit $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ une suite dense de $\mathcal{A}$ et $A \equiv \bigcup_{n \geq 1} \{\mathcal{F}(f_n) \neq 0\}$. Toutes les f_n sont dans $L^2[A] \subset L^2$. Comme toute fonction f de $\mathcal{A}$ est limite dans L^2 de sous-suite des f_n et que la transformée de Fourier est une isométrie de L^2 la fonction $\mathcal{F}^{-1}(f) \in L^2$ est limite dans L^2 des $\mathcal{F}^{-1}(f_n)$ correspondantes. Puisque $L^2[A]$ est fermé dans L^2 on a $\mathcal{F}^{-1}(f) \in L^2[A]$. Pour voir que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{A}) = L^2[A]$ prenons un élément $k \in L^2[A]$ dans l'orthogonal de $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{A})$ dans $L^2[A]$ et montrons qu'il est nul. Puisque $\mathcal{A}$ est invariant par translations et $\mathcal{F}^{-1}(f(\cdot + t))(s) = e^{2i\pi st} \mathcal{F}(f)(s)$ la fonction k doit satisfaire pour tous $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$

$$0 = \langle \mathcal{F}^{-1}(f_n(\cdot + t)), k \rangle = \int e^{2i\pi st} \mathcal{F}^{-1}(f_n)(s) k(s) ds.$$

Mais puisque $\mathcal{F}^{-1}(f_n)$ et k sont dans L^2 leur produit est dans L^1 , et l'égalité précédente nous dit que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}^{-1}(f_n)k) = 0$. L'injectivité de $\mathcal{F}^{-1}$ sur L^1 implique $\mathcal{F}^{-1}(f_n)k = 0$ dans L^1 . Les deux fonctions $\mathcal{F}^{-1}(f_n)$ et k sont à support dans A et $\mathcal{F}^{-1}(f_n)$ est non nulle sur A par définition de cet ensemble, et on peut associer à presque tout point de A une fonction f_n telle que $\mathcal{F}(f_n)$ est non nulle en ce point. Il s'ensuit que k est nul presque partout sur A . $\square$

Il s'ensuit de l'énoncé précédent que le sous-espace vectoriel fermé de L^2 engendré par les translatées d'une fonction $f \in L^2$ est dense dans L^2 si et seulement si $\{\mathcal{F}(f) = 0\}$ est de mesure nulle. Wiener a démontré en 1933 que ce résultat est aussi vrai sur L^1 . On démontre un cas particulier qui suffit dans la grande majorité des applications.

6. Voici la démonstration originale de Young, plus élémentaire techniquement, mais pas forcément conceptuellement. Je note q_2 l'exposant conjugué de p_2 et, pour $f \in L^{p_1}$ et $g \in L^{p_2}$, je pose $h(x, y) = |f(x - y)|^{p_1/r} |g(y)|$, de sorte que $|f(x - y)g(y)| = h(x, y)|f(x - y)|^{p_1/q_2}$. D'après Hölder on a $|(f \star g)(x)| \leq \|h(x, \cdot)\|_{p_2} \|f\|_{p_1}^{p_1/q_2}$, et $\|f \star g\|_r \leq \|f\|_{p_1}^{p_1/q_2} \| \|h(x, \cdot)\|_{p_2} \|_{L_x^r}$. Mais on a d'après l'inégalité de Minkowski

$$\| \|h(x, \cdot)\|_{p_2} \|_{L_x^r}^{p_2} = \left(\int \left(\int h(x, y)^{p_2} dy \right)^{r/p_2} dx \right)^{p_2/r} \leq \int \left(\int h(x, y)^r dx \right)^{p_2/r} dy = \|f\|_{p_1}^{p_1 p_2/r} \|g\|_{p_2}^{p_2}.$$

On en déduit que $\|f \star g\|_r \leq \|f\|_{p_1}^{p_1/q_2} (\|f\|_{p_1}^{p_1 p_2/r} \|g\|_{p_2}^{p_2})^{1/p_2} = \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}$.

Théorème (Wiener) – Soit $f \in L^1$. Si $\mathcal{F}(f)$ ne s'annule pas et $xf \in L^1$ alors le sous-espace fermé de L^1 engendré par les translatées de f est dense dans L^1 .

Démonstration – La démonstration repose sur le lemme suivant, où $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$.

Lemme (de division de Wiener) – Si $\mathcal{F}(f)$ ne s'annule pas et $xf \in L^1$ alors $\mathcal{F}^{-1}(C_c^\infty) \subset f \star L^1$.

Voici comment on conclut à partir du lemme. D'abord, puisque C_c^∞ est dense dans $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est bijective et continue, on voit que $\mathcal{F}^{-1}(C_c^\infty)$ est dense dans $\mathcal{S}$ – l'espace d'arrivée de $\mathcal{F}^{-1}$, pour la topologie sur $\mathcal{S}$ et a fortiori pour la norme L^1 . On obtient la conclusion du théorème de Wiener du fait que $\mathcal{S}$ est dense dans L^1 .

Démonstration du lemme – En effet, la fonction $\mathcal{F}(f)$ ne s'annule pas et c'est une fonction de classe C^1 , comme $xf \in L^1$. On montre ci-dessous qu'une fonction $u \in \mathcal{S}$ telle que $\mathcal{F}(u) \in C_c^\infty$ est la transformée de Fourier d'une fonction $g \in L^1$. La relation $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$ et l'injectivité de la transformée de Fourier (sur $\mathcal{S}$ donc sur l'ensemble des distributions tempérées, par dualité) implique que $u = f \star g$. Soit donc $u \in \mathcal{S}$ telle que $\mathcal{F}(u) \in C_c^\infty$. La fonction $h = \mathcal{F}(u) / \mathcal{F}(f)$ est donc dans C_c^1 . Mais on a d'après Cauchy-Schwarz l'inégalité

$$\int |\mathcal{F}^{-1}(h)(y)| \leq \left(\int (1+|y|^2)^{-1} dy \right)^{1/2} \left(\int (1+|y|^2) |\mathcal{F}^{-1}(h)(y)|^2 dy \right)^{1/2} \lesssim (\|h\|_{L^2}^2 + \|h'\|_{L^2}^2)^{1/2} < \infty$$

La fonction $h \in C_c^1$ est donc, d'après la section 2.3, la transformée de Fourier d'une distribution tempérée Λ_g pour une certaine fonction $g \in L^1$. $\square$

5 Applications linéaires compactes

Le développement de l'analyse fonctionnelle et des considérations qu'on va développer ci-dessous a été en partie motivé par la résolutions d'équations aux dérivées partielles et des problèmes d'optimisation dont les inconnues sont des fonctions. Quelle courbe à extrémités fixées minimise par exemple une quantité de la forme $\int_0^1 F(h(x), h'(x)) dx$? Les études sur l'électromagnétisme menées tout au long du vingtième siècle ont montré que le potentiel électrique induit par une charge f portée par le bord lisse d'un domaine de $\mathbb{R}^d$ est une fonction continue sur l'adhérence du domaine Ω et qui satisfait à l'intérieur l'équation $\Delta f = 0$; on dit que la fonction f est harmonique. On définit une forme quadratique $Q(h) = \int_\Omega |\nabla h|^2$ sur l'ensemble des fonctions continues h sur $\bar{\Omega}$, de classe C^1 sur Ω et dont la restriction au bord de Ω est fixée. Si h réalise le minimum de Q sur cet ensemble on aura pour toute fonction $g \in C_c^1(\Omega)$ que $\frac{dQ(h+\epsilon g)}{d\epsilon}(0) = 0$, c'est-à-dire $\int_\Omega (\nabla h, \nabla g) = 0$, soit encore $\int_\Omega (\Delta h) g = 0$ après intégration par partie. Cette relation ayant lieu pour toute fonction $g \in C_c^1(\Omega)$ on a bien $\Delta h = 0$. Mais quelle raison Q aurait-elle d'atteindre un minimum, et pourquoi cet éventuel minimum serait-il atteint en une fonction C^1 ? ...⁷ Dans une autre direction, les efforts cumulés de nombreux scientifiques amènent finalement à reformuler un certain nombre d'équations aux dérivées partielles sous forme d'équations intégrales de la forme

$$\lambda f - K(f) = g$$

⁷. Voici un autre calcul similaire qui pose des questions similaires. Imaginons qu'une courbe $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 , à extrémités fixées, réalise le minimum des quantités $Q(h) = \int_0^1 F(h(x), h'(x)) dx$ dans cette classe de fonctions. Pour toute variation $g \in C([0, 1], \mathbb{R}^d)$ nulle en 0 et 1 on aura $\frac{dQ(h+\epsilon g)}{d\epsilon}(0) = 0$, c'est-à-dire $\int_0^1 \{(\partial_1 F)(h(x), h'(x)), h'(x))g(x) + (\partial_2 F)(h(x), h'(x))g'(x)\} dx = 0$, soit, après une intégration par partie pour le second terme,

$$\int_0^1 \{(\partial_1 F)(h(x), h'(x)) - \partial_x [(\partial_2 F)(h(x), h'(x))] \} g(x) dx = 0$$

sans terme au bord puisque g y est nulle. Cette relation ayant lieu pour toute telle variation on devine que h doit satisfaire d'une manière ou d'une autre l'équation différentielle

$$(\partial_1 F)(h(x), h'(x)) - \partial_x [(\partial_2 F)(h(x), h'(x))] = 0$$

appelée équation d'Euler.

où $K(f)(x) = \int k(x, y)f(y)dy$ est un opérateur intégral dépendant de chaque problème. On voit apparaître sous cette forme la question du caractère surjectif ou bijectif de l'application linéaire $\lambda \text{Id} - K$, le spectre, etc.

On sait le rôle que joue la compacité pour les questions d'existence en analyse. La classe d'applications linéaires que nous étudions dans cette section palie la non compacité de la boule unité de l'espace de Banach de départ en demandant à ce que l'image de la boule unité par ces applications linéaires soit compacte.

Définition – Une *application linéaire* $T \in \mathcal{B}(E)$ est dite **compacte** si $\overline{T(B_1)} \subset E$ est compacte.

Un opérateur de rang fini est compact. La composée d'un opérateur compact avec un opérateur borné est un opérateur compact : pourquoi ? Voici un autre exemple élémentaire. On considère l'opérateur T de $C([0, 1])$ dans lui-même donné par $T(f)(x) = \int k(x, y)f(y)dy$ où k est une fonction continue sur $[0, 1]^2$. Voyez-vous comment utiliser l'uniforme continuité de k et le théorème d'Arzela-Ascoli pour montrer que T est compact ?

Bon nombre d'espaces de Banach sont caractérisés par certaines propriétés de régularité, d'intégrabilité ou de croissance de certaines quantités. Des opérateurs compacts seront typiquement des opérateurs qui améliorent ces propriétés : dont l'image est plus régulière, plus intégrable ou croît moins, selon le cas. Le théorème de Rellich ci-dessous illustre cette assertion.

Exercice – Notez que si l'espace vectoriel $T(E)$ est fermé c'est un espace de Banach. Le théorème de l'application ouverte donne en ce cas l'existence d'un ouvert de $T(E)$ contenu dans $T(B_1)$. En déduire que si T est de plus compacte alors $T(E)$ doit être de dimension finie.

Exercice – Soit H un espace de Hilbert. Utilisez des opérateurs de projections orthogonales pour montrer que $T \in \mathcal{B}(H)$ est compacte si et seulement si elle est limite pour $\|\cdot\|_{\text{op}}$ d'opérateurs de rangs finis. (Cette équivalence n'a pas lieu si H est un espace de Banach quelconque.) On note T^* l'application duale de T , caractérisée par la relation $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ pour tous x, y de H . Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de H , et $T_n(x) = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x \rangle x_i$. Décrivez T_n^* . Déduire de la caractérisation précédente des opérateurs compacts sur un Hilbert que T^* est compacte. Cette propriété est vraie plus généralement : pour un Banach E et $T \in \mathcal{B}(E)$ on a T compact si et seulement si $T^* \in \mathcal{B}(E^*)$ est compacte.⁸

5.1 Exemples et propriétés

Voici quelques archétypes d'applications linéaires compactes entre espaces élémentaires. Pour alléger les notations on note une suite (a_n) plutôt que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(1) **Opérateurs de multiplication sur l'espace de Hilbert** $\ell^2(\mathbb{N})$: pour une suite (a_n) bornée, on note $T(x_n) = (a_n x_n)$. C'est un opérateur diagonal, compact si et seulement si a_n tend vers 0, car il peut alors être approché arbitrairement bien par des opérateurs de rangs finis pour la norme d'opérateurs. En effet, pour tout $k \geq 1$, l'opérateur $T_k(x_n) = (a_n x_n \mathbf{1}_{n \leq k})$ est de rang fini, donc compact, et $\|T - T_k\|_{\text{op}} = \sup_{n \geq k+1} |a_n| = o_k(1)$ tend ici vers 0. Tout recouvrement fini de $\overline{T_k(B_1)}$ par des boules de rayon ϵ induit donc un recouvrement fini de $\overline{T(B_1)}$ par des boules de rayon $\epsilon + o_k(1)$. Cela montre que l'opérateur T est compact.

Théorème (Rellich) – Pour tous $s_1 < s_2$ de $\mathbb{R}$ l'injection continue de $H^{s_2}(\mathbb{T}^d)$ dans $H^{s_1}(\mathbb{T}^d)$ est compacte.

Démonstration – Et oui ! Notons e_k la suite de $\ell^2(\mathbb{N})$ nulle partout sauf en position k où elle vaut 1. Les $(e_k / \|e_k\|_s)$ forment une base orthonormale de $H^s(\mathbb{T}^d)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Relativement aux bases $(e_k / \|e_k\|_{s_2})$ et $(e_k / \|e_k\|_{s_1})$ l'inclusion est l'opérateur diagonal de multiplication par $(1 + |k|^2)^{(s_2 - s_1)/2}$, qui est compact⁹. $\square$

8. Il est intéressant de s'apercevoir qu'il s'agit d'une application du théorème d'Ascoli-Arzelà ! $\Rightarrow$ Pour $\varphi \in E^*$ on a $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$. Pour une suite (φ_n) de formes linéaires continues sur E de normes 1, les applications $\varphi_n : \overline{T(B_E)} \rightarrow \mathbb{R}$ sont toutes 1-Lipschitz et définies sur un compact si T est compacte. Le théorème d'Ascoli-Arzelà nous dit donc qu'une sous-suite des (φ_n) converge uniformément. Cette assertion est équivalente à la compacité de l'application T^* . La démonstration de l'implication $\Leftarrow$ utilise elle aussi le théorème d'Ascoli-Arzelà.

9. et dont une puissance suffisamment grande est même un opérateur de Hilbert-Schmidt ; démontrez-le !

(2) **Opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\ell^2(\mathbb{N})$** : pour (a_{nm}) avec $\sum_{n,m} |a_{nm}|^2 < \infty$ on pose $T(x_n) = (\sum_{m \geq 1} a_{nm} x_m)$. Notez qu'on a toujours

$$\|T\|_{\text{op}} \leq \left(\sum_{n,m} |a_{nm}|^2 \right)^{1/2} \equiv \|T\|_{\text{HS}}.$$

Démontrez-le. Il s'ensuit que T est limite, pour la norme d'opérateurs, des opérateurs de rangs finis $T_k(x_n) = (\mathbf{1}_{n \leq k} \sum_{m \geq 1} a_{nm} x_m)$, puisque $\|T - T_k\|_{\text{op}} \leq (\sum_{n > k, m} |a_{nm}|^2)^{1/2} = o_k(1)$. L'opérateur T est donc compact.

(3) **Opérateurs de Hilbert-Schmidt sur un Hilbert** : plus généralement, pour H un espace de Hilbert, on dit que $T \in \mathcal{B}(H)$ est *Hilbert-Schmidt* s'il existe une base hilbertienne (e_n) de H telle que $\sum_{n \geq 1} \|T(e_n)\|^2 < \infty$. Cette quantité est en fait indépendante de la base hilbertienne choisie¹⁰. Il s'ensuit que ces opérateurs s'identifient, via le choix d'une base, aux opérateurs de l'exemple (2).

(4) **Opérateurs à noyaux continus sur l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$** : pour une fonction continue K sur $[0, 1]^2$ et $f \in L^2([0, 1])$ on pose $(Tf)(x) = \int_{[0, 1]} K(x, y) f(y) dy$. On a

$$\|T\|_{\text{op}} \leq \left(\int_{[0, 1]^2} |K|^2 \right)^{1/2} \leq \sup_{[0, 1]^2} |K|. \quad (3)$$

Les opérateurs correspondant à des noyaux de la forme $\sum f_i(x) g_i(y)$, pour une somme finie, sont de rangs finis, et donc compacts. Le noyau K est limite uniforme de tels noyaux d'après le théorème de Stone-Weierstrass, aussi l'opérateur T est limite d'opérateurs de rangs finis d'après (3), et donc compact. Si (K_n) est une base orthonormée de $L^2([0, 1])$, et $K_{nm}(x, y) \equiv K_n(x) K_m(y)$, la famille (K_{nm}) constitue une base orthonormée de $L^2([0, 1]^2)$. En écrivant $K = \sum_{n,m} a_{nm} K_{nm}$ dans $L^2([0, 1]^2)$, on a $T(f) \in L^2([0, 1]^2)$ et

$$\int_{[0, 1]^2} |K|^2 = \sum_{n,m} |a_{nm}|^2,$$

ce qui montre que T est en fait un opérateur de Hilbert-Schmidt. De plus, en écrivant $f = \sum_{n \geq 1} f_n K_n$, on a $Tf = \sum_{m \geq 1} a_{nm} f_n K_n$, si bien que T s'identifie à l'opérateur de l'exemple (2).

(5) Les quatre exemples précédents sont sur des espaces de Hilbert, voici un exemple sur un espace de Banach. L'**injection** de $C^1([0, 1])$ dans $C([0, 1])$ est **compacte** d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà. À titre d'exemple, voyez-vous pourquoi l'opérateur de Volterra $f \mapsto (x \mapsto \int_0^x f)$ de $C([0, 1])$ dans lui-même est compact ? Est-ce encore le cas si on considère cette même application de $L^2([0, 1])$ dans lui-même ?

5.2 Principe d'incertitude et opérateurs de Hilbert-Schmidt

Le *principe d'incertitude* quantifie le fait qu'un signal ne peut être très concentré sans avoir un spectre de Fourier très large. Dans le cadre d'un signal temporel, cela signifie qu'une fonction qui est quasiment une masse de Dirac doit avoir une transformée de Fourier à support sur un gros sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Les énoncés de la section 2.2 illustrent ce fait. Nous allons voir ici une quantification différente du principe d'incertitude due à Donoho & Stark en 1986.

10. En effet, si (f_k) est une autre base hilbertienne on a $\|T(e_n)\|^2 = \sum_k \langle T(e_n), f_k \rangle^2 = \sum_k \langle e_n, T^*(f_k) \rangle^2$, si bien que $\sum_{n \geq 1} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{k \geq 1} \|T^*(f_k)\|^2$. Si maintenant (g_ℓ) est une troisième base le même raisonnement donne $\sum_{k \geq 1} \|T^*(f_k)\|^2 = \sum_{\ell \geq 1} \|T(g_\ell)\|^2$, et le tour est joué.

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. On dit qu'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est ϵ -concentrée sur A s'il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ à support dans E telle que $\|f - g\|_2 \leq \epsilon$. On note $|E|$ la mesure de Lebesgue de E .

Théorème (Donoho & Stark) – Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, de norme 1, une fonction qui est ϵ_1 -concentrée sur un ensemble $E_1 \subset \mathbb{R}$ et dont la transformée de Fourier est ϵ_2 -concentrée sur $E_2 \subset \mathbb{R}$. On a alors

$$|E_1||E_2| \geq (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2)^2.$$

Démonstration – On définit

$$P_{E_1}(h) \equiv h \mathbf{1}_{E_1}$$

pour tout $h \in L^2(\mathbb{R})$. Cet opérateur donne la meilleure approximation L^2 de h à support dans E_1 . On définit aussi

$$(\widehat{Q_{E_2}(h)})(t) \equiv \int_{E_2} e^{2i\pi st} \mathcal{F}(h)(s) ds;$$

c'est une reconstruction partielle de h qui n'utilise que les fréquences dans E_2 . C'est aussi la meilleure approximation L^2 de h par une fonction dont la transformée de Fourier est à support dans E_2 . Notez que h est ϵ_1 -concentrée sur E_1 si et seulement si $\|h - P_{E_1}(h)\|_2 \leq \epsilon_1$, et $\mathcal{F}(h)$ est ϵ_2 -concentrée sur E_2 si et seulement si $\|h - \widehat{Q_{E_2}(h)}\|_2 \leq \epsilon_2$, d'après Parseval. L'opérateur $\widehat{Q_{E_2}}$ a une norme 1.

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est ϵ_1 -concentrée sur E_1 et $\hat{f}$ est ϵ_2 -concentrée sur E_2 on a

$$\|f - \widehat{Q_{E_2}(P_{E_1}(f))}\|_2 = \|f - \widehat{Q_{E_2}(f)} - \widehat{Q_{E_2}(P_{E_1}(f) - f)}\|_2 \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$$

et donc $\|f\|_2 - \|\widehat{Q_{E_2}(P_{E_1}(f))}\|_2 \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$, c'est-à-dire $\|\widehat{Q_{E_2}(P_{E_1}(f))}\|_2 \geq 1 - \epsilon_1 + \epsilon_2$. L'opérateur $\widehat{Q_{E_2} \circ P_{E_1}}$ a donc une norme plus grande que $1 - \epsilon_1 + \epsilon_2$. Mais

$$\widehat{Q_{E_2}(P_{E_1}(h))}(t) = \int \mathbf{1}_{E_2}(r) e^{2i\pi rt} \left(\int \mathbf{1}_{E_1}(s) e^{-2i\pi rs} f(s) ds \right) dr,$$

aussi l'opérateur $\widehat{Q_{E_2} \circ P_{E_1}}$ a pour noyau la fonction $k(t, s) = \mathbf{1}_{E_1}(s) \int \mathbf{1}_{E_2}(r) e^{2i\pi r(t-s)} dr$. Notons $k_s(t) = k(t, s)$, pour $s \in E_1$; sa transformée de Fourier vaut $\mathbf{1}_{E_2}(r) e^{-2i\pi rt}$. La norme de Hilbert-Schmidt de $\widehat{Q_{E_2} \circ P_{E_1}}$ vaut

$$\|\widehat{Q_{E_2} \circ P_{E_1}}\|_{\text{HS}}^2 = \iint k(s, t)^2 ds dt = \int \mathbf{1}_{E_1}(s) \|\mathcal{F}(k_s)\|_2^2 ds = \int \mathbf{1}_{E_1}(s) \left(\int \mathbf{1}_{E_2}(r) dr \right) ds = |E_1||E_2|$$

d'après Parseval à la troisième égalité. La conclusion vient donc de l'inégalité élémentaire

$$1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2) \leq \|\widehat{Q_{E_2} \circ P_{E_1}}\|_{\text{op}} \leq \|\widehat{Q_{E_2} \circ P_{E_1}}\|_{\text{HS}}.$$

Cela conclut la démonstration. □

5.3 Propriétés élémentaires des opérateurs compacts

Voici un premier résultat qui dit qu'une application linéaire compacte est petite hormis peut-être sur un espace de dimension finie.

Proposition 7 – Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un sous-espace vectoriel $F_\epsilon \subset E$ de co-dimension finie tel que $\|S|_{F_\epsilon}\| < \epsilon$.

Démonstration – En effet, on peut associer à tout point y de l'ensemble $\overline{S(B_1)}$ un élément¹¹ $y^* \in E^*$ de norme 1 tel que $y^*(y) = \|y\|$ et le voisinage ouvert $O(y^*) = \{z \in E; \|z\| < |y^*(z)| + \epsilon\}$ de y . Pour S compact l'ensemble $\overline{S(B_1)}$ est compact, et donc recouvrable par un nombre fini de ces ouverts, disons $\overline{S(B_1)} \subset \bigcup_{i=1}^n O(y_i^*)$. L'espace vectoriel $\bigcap_{i=1}^n \ker(y_i^* \circ S)$ est de co-dimension plus petite que n , et on a $\|S|_{\bigcap_{i=1}^n \ker(y_i^* \circ S)}\| < \epsilon$ par construction. $\square$

Illustration – Soit $p \in [1, \infty)$. On représente une application linéaire T de $\ell^1(\mathbb{N})$ dans $\ell^p(\mathbb{N})$ par sa matrice (t_{ij}) dans les bases canoniques de chaque espace. Voyez-vous pourquoi l'opérateur T est continu si et seulement si $\sup_j (\sum_i |t_{ij}|^p)^{1/p} < \infty$, auquel cas $\|T\|_{\text{op}} = \sup_j (\sum_i |t_{ij}|^p)^{1/p}$. L'opérateur est compact si et seulement si $\sum_{i \geq n} |t_{ij}|^p = o_n(1)$ uniformément en j . En effet, si c'est le cas T est approché arbitrairement pour la norme d'opérateur par des opérateurs de rangs finis (lesquels ?), il est donc compact. Réciproquement, si le critère n'était pas vérifié on aurait une famille dénombrable de vecteurs de la base canonique de ℓ^1 dont l'image par T dans ℓ^p aurait une norme minorée par une constante. Cela contredirait le résultat de la Proposition 7.

Voici le résumé de ce qu'il faut savoir à propos des applications linéaires compactes.

– Si E est un espace de Hilbert : si $T \in \mathcal{B}(E)$ est compacte et symétrique alors elle se diagonalise en base orthonormée – son spectre est en particulier formé de ses valeurs propres uniquement.

– Dans le cadre général d'un espace de Banach¹² : on n'a pas de résultat de diagonalisation, mais le spectre reste formé par des valeurs propres. Le théorème de Riesz de la section 5.5 précise cela.

On commence par se concentrer sur le cas particulier des espaces de Hilbert.

5.4 Diagonalisation des opérateurs symétriques compacts sur un Hilbert

On suppose dans cette section que l'espace de Banach E est un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

On dit que $K \in \mathcal{B}(H)$ est **symétrique** si $\langle K(x), y \rangle = \langle x, K(y) \rangle$ pour tous $x, y \in H$. Une valeur propre d'un tel opérateur est nécessairement réelle, et tout sous-espace fermé $F \subset H$ stable par K a un orthogonal également stable par K . Ce résultat est la clef en dimension finie pour diagonaliser les opérateurs symétriques en base orthonormée. Dès lors qu'on a l'existence d'un vecteur propre e_1 pour K on peut regarder la restriction $K_{\text{vect}(e_1)^\perp}$ de K à l'orthogonal de $\text{vect}(e_1)$ et procéder par récurrence sur la dimension de l'espace ambiant. On peut obtenir l'existence de e_1 par un raisonnement utilisant la compacité de la boule unité euclidienne S : la restriction à S de la forme quadratique $f(x) = \langle K(x), x \rangle$ étant continue elle atteint son maximum en un point e_1 où sa dérivée $(d_{e_1}f)(h) = 2\langle h, K(e_1) \rangle$ s'annule sur tout le plan tangent à S en e_1 . Les deux formes linéaires $(d_{e_1}f)(\cdot)$ et $\langle e_1, \cdot \rangle$ sont donc proportionnelles, ce dont on tire que $K(e_1)$ est proportionnel à e_1 , i.e. e_1 est un vecteur propre de K . La boule unité d'un espace de Hilbert H de dimension infinie n'étant pas compacte cette démonstration ne fonctionne pas dans ce cadre-là. On peut procéder comme suit pour obtenir l'existence d'un vecteur propre à K .

Lemme – Pour un opérateur compact symétrique K on a $\|K\|_{\text{op}} = \sup_{|x|=1} |\langle K(x), x \rangle|$ et il existe une valeur propre λ_1 de K telle que $|\lambda_1| = \|K\|_{\text{op}}$.

Démonstration – On montre d'abord la première égalité, pour laquelle l'inégalité $a \equiv \sup_{|x|=1} \langle K(x), x \rangle \leq \|K\|_{\text{op}}$ est claire. Mais l'inégalité du parallélogramme et le caractère symétrique de K nous disent qu'on a pour tous $x, y \in H$ de norme 1

$$|\langle K(x), y \rangle| = \frac{1}{4} |\langle K(x+y), x+y \rangle - \langle K(x-y), x-y \rangle| \leq \frac{a}{4} (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = a.$$

On en déduit que $\|K\|_{\text{op}} = \sup_{|x|=1, |y|=1} |\langle K(x), y \rangle| \leq a$.

11. L'existence d'une telle forme linéaire continue est obtenue du théorème de Hahn-Banach en prolongeant la forme linéaire continue $L(ry) = r$ définie sur la droite engendrée par y .

12. La notion d'opérateur symétrique n'a plus de sens puisque K^* est un opérateur sur $E^* \neq E$ et non plus sur E .

Si maintenant $\langle A(x_n), x_n \rangle \rightarrow \lambda_1$ avec $\|x_n\| = 1$ et $|\lambda_1| = \|K\|_{\text{op}}$, du fait que K est *symétrique*, on a lorsque n tend vers $+\infty$

$$\|K(x_n) - \lambda_1 x_n\|^2 = \|K(x_n)\|^2 - 2\lambda_1 \langle K(x_n), x_n \rangle + \lambda_1^2 \rightarrow 0.$$

Mais puisque K est *compacte* une sous-suite $K(x_{\varphi(n)})$ converge. On déduit de l'inégalité précédente que $(x_{\varphi(n)})$ converge elle aussi et que sa limite est un vecteur propre de valeur propre associée λ_1 . $\square$

Théorème (Diagonalisation des opérateurs symétriques compacts d'un Hilbert) – Il existe une suite de réels positifs (λ_n) , de limite nulle, telle qu'en notant p_n l'opérateur de projection orthogonale sur $\ker(\lambda_n \text{Id} - K)$ on a pour tout $x \in H$ les décompositions $(x - \sum_{n \geq 1} p_n(x)) \in \ker(K)$ et $K(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n p_n(x)$.

Démonstration – On procède par étapes.

- On construit les λ_n par récurrence. Notons E_n la somme direct orthogonale des espaces de dimension finie $\ker(\lambda_k \text{Id} - K)$ pour $k \leq n$, et posons $K_n = E_n^\perp \rightarrow E_n^\perp$. C'est un opérateur compact symétrique de $E_n^\perp$ de norme $|\lambda_{n+1}| = \|K_n\|_{\text{op}}$ d'après le lemme précédent. Notons x_n un vecteur propre associé à λ_n , pour tout n . L'espace vectoriel $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est de dimension n .

- On démontre par l'absurde que λ_n tend vers 0 en supposant que cette suite décroissante converge vers $\lambda > 0$. Pour tout point $y_n \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ on a $(K - \lambda_n \text{Id})(y_n) \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$. Prenons pour chaque $n \geq 1$ un point $y_n \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ de norme 1 tel que $\text{dist}(y_n, \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})) \geq 1/2$. On aura alors pour $k < \ell$

$$\left\| \frac{K(y_k)}{\lambda_k} - \frac{K(y_\ell)}{\lambda_\ell} \right\| = \left\| \left(\frac{K(y_k)}{\lambda_k} - \frac{(K - \lambda_\ell \text{Id})(y_\ell)}{\lambda_\ell} \right) - y_\ell \right\| \geq \frac{1}{2} \quad (4)$$

puisque $\frac{K(y_k)}{\lambda_k} + \frac{(K - \lambda_\ell \text{Id})(y_\ell)}{\lambda_\ell} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{\ell-1})$, alors que, K étant compacte et la suite $(|\lambda_n|)$ restant bornée et loin de 0, une sous-suite des $K(y_n)/\lambda_n$ doit converger, en contradiction avec (4).

- On a $K(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j p_j(x) = K(x - \sum_{j \leq n} p_j(x)) = K_n(x - \sum_{j \leq n} p_j(x))$ et donc

$$\left\| K(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j p_j(x) \right\| \leq \lambda_{n+1} \left\| x - \sum_{j \leq n} p_j(x) \right\| \leq \lambda_{n+1} \|x\| \rightarrow 0.$$

Riesz-Fischer nous assure la convergence de $\sum_{j \leq n} p_j(x)$ lorsque n tend vers l'infini, et la continuité de K nous dit que $x - \sum p_j(x)$ est dans le noyau de K . $\square$

5.5 Retour au cadre général

Le résultat principal sur les applications linéaires compactes définies sur un Banach quelconque est dû à F. Riesz.

Théorème (F. Riesz 1912) – Le spectre d'une application linéaire compacte non nulle $K \in \mathcal{B}(E)$ est formé de valeurs propres, dont les espaces propres associés sont de dimensions finies. De plus $\sigma(K) \subset \mathbb{C}$ n'a que le point $0 \in \mathbb{C}$ comme point d'accumulation, et $0 \in \sigma(K)$ si $\dim(E) = \infty$.

L'ensemble $\sigma(K)$ est en particulier dénombrable. Le concept suivant sera utile pour la démonstration de ce résultat.

Définition – Un opérateur $T \in \mathcal{B}(E)$ est dit de **Fredholm** si son noyau est de dimension finie et son image admet un supplémentaire de dimension finie. On définit alors son **indice** par la formule

$$\text{ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \text{codim}(T(E)).$$

L'identité est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Si T est un opérateur de Fredholm d'indice 0, il est injectif si et seulement si il est surjectif. Le résultat suivant sera démontré plus bas.

Lemme 8 – L'ensemble $\text{Fredh}(E)$ des opérateurs de Fredholm forme un ouvert de $\mathcal{B}(E)$, et l'application indice est continue sur $\text{Fredh}(E)$.

Voici le résultat principal sur les opérateurs de Fredholm.

Théorème (Fredholm) – Pour $T \in \mathcal{B}(E)$ un opérateur de Fredholm et $K \in \mathcal{B}(E)$ compacte, l'opérateur $T + K$ est aussi de Fredholm et $\text{ind}(T + K) = \text{ind}(T)$.

Démonstration du théorème de Riesz à l'aide du théorème de Fredholm – On récolte les informations les unes après les autres.

- Comme K est compacte et l'espace E de dimension infinie, K n'est pas surjective, i.e. $0 \in \sigma(S)$.
- Comme $-z\text{Id}$ est de Fredholm, d'indice nulle, le théorème de Fredholm nous assure que l'opérateur $K - z\text{Id}$ est aussi de Fredholm et d'indice nul lorsque $z \neq 0$. L'espace $\ker(K - z\text{Id})$ est donc de dimension finie, et $K - z\text{Id}$ est inversible si et seulement si il est injectif. Son spectre est donc formé de valeurs propres, à l'exception du point $0 \in \mathbb{C}$.
- On répète ici l'argument déjà rencontré dans le théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques compacts. Si $\sigma(K)$ avait un point d'accumulation $\lambda \neq 0$ limites de $\lambda_n \in \mathbb{C}$ on aurait des vecteurs propres associés x_n . Pour tout point $y_n \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ on a $(K - \lambda_n \text{Id})(y_n) \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$. Suivant F. Riesz¹³, prenons pour chaque $n \geq 1$ un point $y_n \in E$ de norme 1 tel que $\text{dist}(y_n, \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})) \geq 1/2$. On aura alors pour $k < \ell$

$$\left\| \frac{K(y_k)}{\lambda_k} - \frac{K(y_\ell)}{\lambda_\ell} \right\| = \left\| \left(\frac{K(y_k)}{\lambda_k} - \frac{(K - \lambda_\ell \text{Id})(y_\ell)}{\lambda_\ell} \right) - y_\ell \right\| \geq \frac{1}{2} \quad (5)$$

puisque $\frac{K(y_k)}{\lambda_k} + \frac{(K - \lambda_\ell \text{Id})(y_\ell)}{\lambda_\ell} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{\ell-1})$, alors que, K étant compacte et la suite (λ_n) convergeant vers une limite non nulle, une sous-suite des $K(y_n)/\lambda_n$ doit converger. L'inégalité (4) interdit cela : une contradiction. $\square$

Nous illustrons les théorèmes de Riesz et de Fredholm dans les deux sections suivantes, avant de donner deux démonstrations du théorème de Fredholm dans les sections 8 et 9, d'abord dans le cas particulier d'espaces de Hilbert puis dans le cadre général d'espaces de Banach.

6 Opérateur $\Delta + V$

L'opérateur laplacien $\Delta = -\sum_{i=1}^d (D_i)^2$ est décrit en Fourier par

$$\widehat{(\Delta f)}(k) = |k|^2 \mathcal{F}(f)(k).$$

On a $\langle \Delta f, f \rangle = \langle \nabla f, \nabla f \rangle \geq 0$. Le signe $-$ dans la définition du laplacien est là pour assurer cette propriété. Il suffit de réaliser que l'opérateur $1 + \Delta$ est en Fourier l'opérateur de multiplication par $1 + |k|^2$ pour justifier le résultat suivant.

Lemme – Pour tout entier $n \geq 1$ l'opérateur $(1 + \Delta)^n$ est une isométrie de $H^n(\mathbb{T}^d)$ sur $H^{-n}(\mathbb{T}^d)$. De plus l'opérateur $(1 + \Delta)^{-1} : H^0(\mathbb{T}^d) \rightarrow H^2(\mathbb{T}^d)$ est une isométrie.

Théorème (Diagonalisation de l'opérateur $\Delta + V$) – Soit $V \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ une fonction bornée minorée par une constante strictement positive ϵ . L'espace $L^2(\mathbb{T}^d)$ admet une base orthonormée de fonctions propres de l'opérateur $\Delta + V$.

¹³. Si $z \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ est à distance d de cet espace vectoriel il y a un point x du sous-espace situé à distance de z plus petite que $2d$. Notons $y_n = \frac{z - x}{|z - x|}$. On a alors $|z - x - x'| \geq d$ et $\left| y_n - \frac{x'}{|z - x|} \right| \geq \frac{1}{2}$ pour tout $x' \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$.

La démonstration de ce théorème utilise un résultat intermédiaire intéressant en soi, appelé ‘argument de Fredholm’. L’opération de multiplication par V est continue de $H^s(\mathbb{T}^d)$ dans lui-même pour tout $s \in \mathbb{R}$. L’opérateur $(\Delta + V)(f) = \Delta f + Vf$ envoie continûment $H^2(\mathbb{T}^d)$ dans $H^0(\mathbb{T}^d)$.

Théorème 9 (Argument de Fredholm) – L’application linéaire $\Delta + V: H^2(\mathbb{T}^d) \rightarrow H^0(\mathbb{T}^d)$ est un isomorphisme.

Démonstration – L’inégalité

$$\langle (\Delta + V)f, f \rangle \geq \min(1, \epsilon) \{ \langle \Delta f, f \rangle + \langle f, f \rangle \} = \min(1, \epsilon) \|f\|_2^2$$

implique l’injectivité de l’application $\Delta + V$. En composant $\Delta + V$ avec l’isométrie $(1 + \Delta)^{-1}: H^0(\mathbb{T}^d) \rightarrow H^2(\mathbb{T}^d)$ on obtient

$$(\Delta + V)(1 + \Delta)^{-1} = (1 + \Delta + V - 1)(1 + \Delta)^{-1} = \text{Id} + K$$

où $K = (V - \text{Id})(1 + \Delta)^{-1}$ est un opérateur compact de $H^0(\mathbb{T}^d)$ dans lui-même, car à valeurs dans $H^2(\mathbb{T}^d)$. L’opérateur $(\Delta + V)(1 + \Delta)^{-1}$ est donc d’après le lemme précédent un opérateur de Fredholm d’indice 0. Puisqu’il est injectif, il est surjectif, donc bijectif, c’est un isomorphisme, d’après le théorème de Banach du même nom. Le résultat s’ensuit. $\square$

Démonstration du théorème de diagonalisation – D’après le théorème de Rellich l’isomorphisme inverse

$$(\Delta + V)^{-1}: H^0(\mathbb{T}^d) \rightarrow H^2(\mathbb{T}^d)$$

fournit une application linéaire compacte injective $T \in \mathcal{B}(H^0(\mathbb{T}^d))$ après injection de $H^2(\mathbb{T}^d)$ dans $H^0(\mathbb{T}^d)$. Cette application est auto-adjointe puisque si l’on se donne $f, g \in H^0(\mathbb{T}^d)$ d’écriture unique $f = (\Delta + V)f'$ et $g = (\Delta + V)g'$, avec $f', g' \in H^2(\mathbb{T}^d)$, on a

$$\langle T(f), g \rangle = \langle T(\Delta + V)(f'), (\Delta + V)g' \rangle = \langle f', (\Delta + V)g' \rangle = \langle (\Delta + V)f', T(\Delta + V)(g') \rangle = \langle f, T(g) \rangle.$$

Le théorème de décomposition spectrale des opérateurs symétriques compacts s’applique à T : il y a une base orthonormée (e_n) de $H^0(\mathbb{T}^d)$ et de valeurs propres associées (μ_n) non nulles puisque T est injective. Comme $T(e_n) = \mu_n e_n$ on a $e_n \in H^2(\mathbb{T}^d)$. En appliquant $(\Delta + V)$ de chaque côté, et puisque $(\Delta + V)T = \text{Id}$, on voit que les (e_n) forment la base orthonormée de l’énoncé, de valeurs propres associées $1/\mu_n$. $\square$

7 Sous-espaces invariants par une application compacte

Pour $T \in \mathcal{B}(E)$ on note $\text{Comm}(T)$ l’ensemble des $S \in \mathcal{B}(E)$ commutant avec T . Le résultat suivant fut prouvé par Lomonosov en 1973.

Théorème (Lomonosov) – Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Soit $K \in \mathcal{B}(E)$ une application linéaire compacte non nulle. Il existe un sous-espace non trivial de E stable par tous les $S \in \text{Comm}(K)$.

Démonstration – On raisonne par l’absurde en supposant que tout sous-espace stable par $\text{Comm}(K)$ est trivial. On va en déduire que K a une valeur propre non nulle et un espace propre associé non trivial, de dimension finie et donc non trivial *puisque E est de dimension infinie*. Cet espace propre étant stable par tous les éléments de $\text{Comm}(K)$, cela contredira notre hypothèse.

Pour chaque point $y \in E$, l’orbite $\text{Comm}(K)(y) = \{S(y); S \in \text{Comm}(K)\}$ de y et un espace vectoriel non nul stable par $\text{Comm}(K)$, qui doit donc être égale à l’espace tout entier. Pour toute boule ouverte B , on peut donc associer à chaque y un voisinage V_y et une application $S_y \in \text{Comm}(K)$ tels que $S_y(V_y) \subset B$.

Prenons maintenant un point $x_0 \in E$ tel que $T(x_0) \neq 0$. Il y a une boule B de centre x_0 formée de points pour lesquels $\|K(x)\| \geq \frac{1}{2} \|K(x_0)\| > 0$. Comme K est compacte, on a $\overline{K(B)} \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ pour un nombre fini n . Notons $\mu = \max \{\|S_{y_1}\|_{\text{op}}, \dots, \|S_{y_n}\|_{\text{op}}\}$. Le point x_0 va donc d'abord en $K(x_0)$ par K , puis est envoyé par l'un des S_{y_i} dans B , disons $S_{y_{a(1)}}$; je note $x_1 = (S_{y_{a(1)}}K)(x_0)$ ce point. On le renvoie par K dans $\overline{K(B)}$ puis par l'un des S_{y_j} dans B , disons $S_{y_{a(2)}}$; on note x_2 ce point, puis on itère la procédure. Chaque x_ℓ étant dans $\overline{K(B)}$ on a toujours $\|x_\ell\| \geq \frac{1}{2} \|K(x_0)\|$, mais aussi

$$x_\ell = S_{y_{a(\ell)}} K \cdots S_{y_{a(1)}} K(x_0) = S_{y_{a(\ell)}} \cdots S_{y_{a(1)}} K^\ell(x_0)$$

du fait que les $S_{y_{a(n)}}$ commutent avec K . On a donc aussi $\|x_\ell\| \leq \mu^\ell \|K^\ell\|_{\text{op}}$. On en déduit que $\frac{1}{2} \|K(x_0)\| \leq \mu^\ell \|K^\ell\|_{\text{op}}$ et que le rayon spectral $\rho(K)$ de K est supérieur à $1/\mu$, donc strictement positif. Il s'ensuit du théorème de Riesz que K a une valeur propre non nulle. $\square$

8 Opérateurs de Fredholm sur un espace de Hilbert

On va démontrer un résultat plus fort que le théorème de Fredholm dans le cas particulier où l'espace ambiant est un espace de Hilbert H plutôt qu'un espace de Banach E . On tire partie de résultats spécifiques au cadre hilbertien :

1) On dispose dans un espace de Hilbert de la notion de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé. Elle a pour conséquence la caractérisation des opérateurs linéaires compacts comme limites, pour la norme d'opérateurs, d'opérateurs de rangs finis. (Ce résultat est faux pour un espace de Banach quelconque, un fait profond.)

2) L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel fermé fournit toujours un supplémentaire.

Théorème (Parametrix d'Atkinson) – Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) l'opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est de Fredholm,
- (2) il existe un opérateur S tel que les opérateurs $ST - \text{Id}$ et $TS - \text{Id}$ sont de rang fini,
- (3) les opérateurs $ST - \text{Id}$ et $TS - \text{Id}$ sont compacts.

On note T^* l'application duale de T . L'application T^* est définie sur H et à valeurs dans H – un fait particulier au cadre hilbertien. On déduit la première partie du théorème 4, sur les perturbations compacts d'un opérateur de Fredholm, de l'item (3) du théorème d'Atkinson et du fait que le dual d'un opérateur compact est compact. La seconde partie du théorème de Fredholm est démontrée dans le corollaire 13 ci-dessous.

Démonstration du théorème d'Atkinson – Vous noterez l'organisation logique différente qui structure cette démonstration, comparée à l'organisation de la démonstration du théorème 5. On établit deux lemmes utiles.

Lemme 10 (sur les produits) – Soient $S, T \in \mathcal{B}(H)$. On a $S, T \in \text{Fredh}(H)$ si et seulement si $ST, TS \in \text{Fredh}(H)$. De plus, si S est inversible et $T \in \text{Fredh}(H)$ alors $\text{ind}(ST) = \text{ind}(T)$.

Démonstration – En effet, le sens $\Leftarrow$ est élémentaire. Pour le sens $\Rightarrow$ notez que $\ker(ST) = T^{-1}(\ker(S) \cap \text{im}(T))$ est de dimension finie puisque $\ker(S)$ et $\text{im}(T)$ le sont. Si U et V sont des espaces de dimensions finies qui complètent $S(H)$ et $T(H)$ respectivement, alors $H = S(H) \oplus U = S(T(H) \oplus V) \oplus U$ et l'on voit que $S(V) \oplus U$ complémente $ST(H)$. Cela finit la démonstration du fait que $ST \in \text{Fredh}(H)$. On montre que $TS \in \text{Fredh}(H)$ en échangeant les rôles de S et T . L'assertion “De plus...” est élémentaire et laissée en exercice. $\square$

Lemme 11 – Si $T = S + K$ avec S inversible et K compacte alors $T \in \text{Fredh}(H)$ et $\text{ind}(T) = 0$.

Démonstration – En effet, il suffit d'après le lemme précédent de voir que $I + K$ est Fredholm d'indice 0. Étant dans un Hilbert on peut écrire $K = L + o$, avec L de rang fini et o de norme petite, disons strictement plus petite que 1. On a encore d'après le lemme 10 que $\text{ind}(I + K) = \text{ind}(I + (1 + o)^{-1}L)$, où $M \equiv (1 + o)^{-1}L$ est de rang fini. L'espace $H_1 = \ker(M) \cap \ker(M^*)$ est de co-dimension finie, M et M^* sont nulles sur H_1 et M laisse stable l'espace de dimension finie $H_1^\perp$. Dans la décomposition $H = H_1^\perp \oplus H_1$ on a donc $\text{Id} + M = (\text{Id} + M|_{H_1^\perp}) \oplus \text{Id}$. On est donc ramené au cas de la dimension finie, dont on tire la conclusion. Notons pour finir que la réciproque du lemme 11 est aussi vraie ; démontrez-le. $\square$

On voit en conséquence du lemme 11 que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'opérateur $K - z\text{Id}$ est de Fredholm, d'indice 0. Il est donc soit inversible, soit de noyau non trivial et de dimension finie. Cet énoncé est appelé *l'alternative de Fredholm*.

(1) $\Rightarrow$ (2) La restriction de T est un isomorphisme entre $\ker(T)^\perp$ et $\text{im}(T)$. Définissons S comme égale à 0 sur $\ker(T^*)$ et l'inverse de T sur $\text{im}(T)$. On a bien $TS|_{\text{im}(T)} = \text{Id}|_{\text{im}(T)}$ et $ST|_{\ker(T)^\perp} = \text{Id}|_{\ker(T)^\perp}$, les deux applications $ST - \text{Id}$ et $TS - \text{Id}$ sont de rang fini.

(2) $\Rightarrow$ (3) Une application de rang fini est compacte.

(3) $\Rightarrow$ (1) On a $ST = \text{Id} + K_1$ et $TS = \text{Id} + K_2$ pour deux applications $K_1, K_2 \in \mathcal{B}(H)$ compactes. Le lemme 11 nous dit que ST et TS sont toutes deux Fredholm, et le lemme 8 sur les produits nous dit que S et T sont elles aussi Fredholm. $\square$

Théorème 12 (Propriété de stabilité) – *L'ensemble $\text{Fredh}(H)$ est ouvert dans $\mathcal{B}(E)$ et l'application $\text{ind}(\cdot) : \text{Fredh}(H) \rightarrow \mathbb{N}$ est continue.*

Démonstration – C'est une conséquence du lemme 10. Pour $T \in \text{Fredh}(H)$ notons $S = T \otimes T^*$ l'application sur $H \otimes H$. Comme $\ker(S) = \ker(T) \otimes \ker(T^*)$ et $\text{im}(S) = \text{im}(T) \otimes \text{im}(T^*)$, l'application S est Fredholm d'indice 0. Elle est donc d'après le lemme 10 de la forme $S + K$ avec S inversible et K compacte. C'est encore le cas pour toute perturbation suffisamment petite de S , par exemple de la forme $A \otimes 0$ avec A assez petite. L'application $(T + A) \otimes T^*$ est donc encore Fredholm et d'indice 0, ce qui implique que $T + A$ est Fredholm, de même indice que T . $\square$

Corollaire 13 (Perturbations compactes) – *Si l'opérateur T est Fredholm et K compacte alors $\text{ind}(T + K) = \text{ind}(T)$.*

Démonstration – L'application $(t \in [0, 1]) \rightarrow \text{ind}(T + tK)$ est en effet continue et à valeur dans les entiers ; elle est donc constante. $\square$

9 Démonstration du théorème de Fredholm : cas général

L'assertion $\text{ind}(T + K) = \text{ind}(T)$ sera une conséquence immédiate du lemme 8 dès qu'on aura démontré que $T + tK$ est un opérateur de Fredholm pour tout $t \in [0, 1]$ puisque $t \rightarrow \text{ind}(T + tK)$ sera continue et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- Voici comment on montre que $\ker(T + K)$ est de dimension finie. Notons F un supplémentaire fermé de l'espace de dimension finie $\ker(T)$. Le théorème de l'isomorphisme de Banach nous donne l'existence d'une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F$. Pour $0 < \epsilon < c/2$ la proposition 1 implique qu'on a $\|(T + K)(x)\| \geq \frac{c}{2}\|x\|$ pour tout $x \in F \cap F_\epsilon$. L'espace $F \cap F_\epsilon$ a donc une intersection triviale avec $\ker(T + K)$, qui est donc de dimension finie puisque $F \cap F_\epsilon$ est de co-dimension finie.

- On va voir dans un instant que $(T + K)(E)$ est fermé. Pour voir qu'il est de co-dimension finie on note d'abord que T réalise un isomorphisme de $F \cap F_\epsilon$ sur son image, avec $F \cap F_\epsilon$ et $T(F \cap F_\epsilon)$ tous deux de co-dimensions finies. Notons $E = T(F \cap F_\epsilon) \oplus G$ avec G sous-espace de dimension finie et $\pi : E \rightarrow E/G$ la projection canonique, si bien que $\pi \circ T$ réalise un isomorphisme entre $F \cap F_\epsilon$ et E/G . Il existe par ailleurs un $\epsilon_0 > 0$ tel que toute perturbation de $\pi \circ T|_{F \cap F_\epsilon}$ par une application de norme plus petite que ϵ_0 est encore un isomorphisme entre $F \cap F_\epsilon$ et E/G . Si l'on choisit $0 < \epsilon < \epsilon_0$ on aura donc que $\pi \circ (T + K)$ réalise un isomorphisme entre $F \cap F_\epsilon$ et E/G ; cela implique en particulier que $(T + S)(F \cap F_\epsilon)$ est de co-dimension finie dans E , et donc que $(T + K)(E)$ est de co-dimension finie.

- Il reste à voir que $(T + K)(E)$ est fermé. Supposons pour cela qu'une suite $(T + K)(x_n)$ converge vers $y \in E$. Découpons chaque x_n sous la forme $x_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in F$ et $b_n \in \ker(T)$.

(i) Si la suite (x_n) est bornée on peut supposer que b_n converge¹⁴ et que $K(x_n)$ converge, comme K est compacte ; a fortiori $T(x_n)$ converge aussi. Puisque $a_n \in F$ on a $\|T(a_n)\| \geq c\|a_n\|$, et la suite (a_n) se retrouve de Cauchy ; elle converge dans F fermé.

¹⁴. Car cette suite prend ses valeurs dans un ensemble borné d'un espace de dimension finie.

(ii) Si la suite (x_n) n'est pas bornée elle a une sous-suite dont les normes tendent vers $+\infty$. On travaille avec cette sous-suite, toujours notée (x_n) . Notons $r_n = \text{dist}(x_n, \ker(T + K))$ et prenons $z_n \in \ker(T + K)$ tel que $r_n \leq |x_n - z_n| \leq r_n + 1/n$. Si r_n est borné on peut appliquer à la suite bornée $(x_n - z_n)$ le raisonnement du point précédent, et conclure. On va voir qu'il n'est en fait pas possible que r_n tende vers $+\infty$. Si c'était le cas, on poserait $x'_n = \frac{x_n - z_n}{|x_n - z_n|}$; ce point à distance de $\ker(T + K)$ supérieure à $r_n/(r_n + 1/n)$, serait à distance de $\ker(T + K)$ uniformément positive si r_n divergeait. On pourrait appliquer l'item (i) à cette suite (x'_n) , qui devrait donc converger, vers un point de $\ker(T + K)$ puisque $(T + K)(x'_n) = (T + K)(x_n)/|x_n - z_n| \rightarrow 0$, une contradiction. $\square$

Démonstration du lemme 8 – On a un espace vectoriel fermé E_1 tel que $E = \ker(T) \oplus E_1$ et un espace de dimension finie E_2 tel que $E = T(E) \oplus E_2$. L'application

$$\bar{T} : \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2\} \rightarrow T(e_1) + e_2$$

est un isomorphisme de E sur lui-même, d'après le théorème de l'isomorphisme de Banach. Toute petite perturbation est encore un isomorphisme ; c'est en particulier le cas de

$$\bar{S}(e_1, e_2) = S(e_1) + e_2$$

si $S \in \mathcal{B}(E)$ est suffisamment proche de T . L'espace $S(E_1) = \bar{S}(E_1 \times \{0\})$ est fermé, et le fait que $\bar{S}$ soit un isomorphisme implique que $S(E_1)$ est en somme direct avec E_2 dans E . L'injectivité de $\bar{S}$ implique aussi que $E_1 \cap \ker(S) = \{0\}$, ce qui montre que S est un opérateur de Fredholm. Ce raisonnement montre que $\text{Fredh}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{B}(E)$.

À ce stade, on peut aussi écrire $E = E_1 \oplus \ker(S) \oplus E'_1$ pour un certain sous-espace E'_1 de dimension finie. On a donc $E = S(E_1) \oplus E_2$ et $S(E_1) \oplus S(E'_1) \subset E = \{T(E) \oplus E_2\}$, ce qui nous dit que $\text{codim}(S(E)) = \text{codim}(T(E)) - \dim(E'_1)$, tandis que $\dim(\ker(T)) = \dim(\ker(S)) + \dim(E'_1)$. L'égalité $\text{ind}(S) = \text{ind}(T)$ s'ensuit. $\square$