L'indispensable sur les espaces de Banach

Je rappelle que la complétude d'un espace métrique est équivalente à la propriété des "segments emboîtés" : toute intersection dénombrable décroissante de boules fermées est d'intersection non vide.

Théorème 1. (Baire) *Dans un espace métrique complet, pour toute réunion dénombrable de fermés $(F_n)_{n\geqslant 1}$ remplissant l'espace, l'un d'entre eux contient une boule ouverte.*

Démonstration – Sans quoi toute boule ouverte B contiendrait pour chaque $n \geqslant 1$ un point x_n qui ne serait pas dans le fermé F_n. C'est donc toute une boule ouverte de B, de centre x_n qui ne rencontrerait pas F_n. Une boule fermée de rayon un peu plus petit a la même propriété. On pourrait donc fabriquer par récurrence une suite B_n décroissante de boules fermées, de rayon tendant vers 0, telles que $\overline{B}_n$ ne rencontre aucun des fermés $F_1, \ldots, F_n$. L'espace étant complet, l'intersection non vide des $\overline{B}_n$ contiendrait un point n'appartenant à aucun des fermés F_n, en contradiction avec l'hypothèse $E = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$. ▷

Je rappelle qu'une sermi-norme sur un espace vectoriel est une 'norme' qui peut avoir des vecteurs non nuls de taille nulle.

Théorème 2. (Zabrejko) *Soit maintenant $(Z, |\cdot|)$ un espace de Banach et $p : Z \to \mathbb{R}^+$ une semi-norme telle que pour toute série convergeant $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ dans Z on a*

$$p\Big(\sum_{n\geqslant 0} z_n\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} p(z_n). \tag{0.1}$$

Il existe alors une constante M telle que $p(\cdot) \leqslant M|\cdot|$.

Démonstration – Il suffit de voir que p est bornée sur la boule unité fermée $\overline{B}$ de Z puisque

$$p(\lambda z) = |\lambda| p(z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, z \in Z. \tag{0.2}$$

Comme $Z = \bigcup_{n\geqslant 1} \overline{\{p \leqslant n\}}$ l'un des fermés $\overline{\{p \leqslant n\}}$ est d'intérieur non vide, disons $\overline{\{p \leqslant n_0\}}$. Notons $z_0 + r_0\overline{B}$ une boule fermée incluse dans $\overline{\{p \leqslant n_0\}}$. On a $p(\overline{B}) \leqslant (n_0 + p(-z_0))/r_0 =: m_0$ d'après la propriété de positive homogénéité (0.2), si bien que $\overline{B} \subset \overline{\{p \leqslant m_0\}}$. On peut alors utiliser la propriété élémentaire suivante.

Lemme – *Si $\overline{B}$ est incluse dans l'adhérence d'un ensemble $\mathcal{E}$ alors tout point z de $\overline{B}$ s'écrit sous la forme*

$$z = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-(n-1)} z_n$$

avec $z_n \in \mathcal{E}$.

◀ On construit par récurrence les $z_n \in \mathcal{E}$ de sorte que $\left|z - \sum_{j=1}^{n} 2^{-j+1} z_j\right| \leqslant 2^{-n}$. ▶

On a alors pour tout z de la boule fermée $\overline{B}$

$$p(z) = p\Big(\sum_{n\geqslant 1} 2^{-(n-1)} z_n\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} 2^{-(n-1)} p(z_n) \leqslant 2m_0.$$

▷

Pour une application linéaire $T : E \to F$ entre espaces vectoriels normés je note $|||T|||$ sa norme d'opérateur. Je note aussi $a \lesssim b$ si $a \leqslant mb$ pour une constante positive m.

Théorème 3. (Banach & co) *Soit $(E, |\cdot|)$ un espace de Banach et $(F, |\cdot|_F)$ un espace vectoriel normé.*

- *Supposons que F est aussi un espace de Banach. Pour qu'une application linéaire $T : E \to F$ soit continue il suffit que son graphe $\big\{\big(x, T(x)\big)\big\}_{x\in E}$ soit un sous-ensemble fermé de $E \times F$.*

- *Supposons que F est aussi un espace de Banach, et soit $T : E \to F$ une bijection continue. Alors $T^{-1} : F \to E$ est aussi continue :*
$$|x| \lesssim \big|T(x)\big|_F \lesssim |x|, \quad \forall x \in E.$$
- *Soit $(T)_{T\in\mathcal{T}}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Il suffit d'avoir*
$$\sup_{T\in\mathcal{T}} |T(x)|_F < \infty$$
pour chaque $x \in E$, pour avoir
$$\sup_{T\in\mathcal{T}} |||T||| < \infty$$

Démonstration – • Le premier point constitue le théorème du graphe fermé. On l'obtient en corollaire du résultat de Zabrejko en travaillant sur l'espace de Banach E en prenant $p(x) = \big|T(x)\big|_F$. Pour la vérification, on ne perd rien à prendre une suite x_k d'éléments de E telle que $\sum_k \big|T(x_k)\big|_F < \infty$. Comme F est un espace de Banach, la somme $\sum_k T(x_k)$ est convergente. Si donc la somme $\sum_k x_k$ est convergente dans E l'hypothèse nous assure que $\sum_k T(x_k) = T\big(\sum_k x_k\big)$, et la conclusion vient de ce que les sommes partielles vérifient $\big|\sum_{k\leqslant\ell} T(x_k)\big| \leqslant \sum_n \big|T(x_n)\big|$ pour tout ℓ.

• Le deuxième point constitue le théorème de l'application ouverte. C'est une conséquence immédiate du premier point dans la mesure où le graphe de l'application T^{-1} est l'image du graphe de T par l'isomorphisme $(x,y) \in E \times F \mapsto (y,x) \in F \times E$. Le graphe de T est donc fermé si et seulement si celui de T^{-1} est fermé.

• Le troisième point constitue le théorème de Banach-Steinhaus, démontré indépendamment par Hahn et Hildebrandt. On l'obtient en corollaire du résultat de Zabrejko en travaillant sur l'espace de Banach E avec la semi-norme $p(x) = \sup_{T\in\mathcal{T}} \big|T(x)\big|_F$. La vérification des hypothèses du théorème 2 est directe. ▷

L'énoncé suivant donne une version du théorème de Lax-Milgram qui fonctionne sur des espaces de Banach. Ce type de résultat est utilisé en particulier pour résoudre des EDPs, une fois celles-ci reformulées sous une forme ad hoc.

Théorème 4. (Babuska) *Soit Z_1 et Z_2 deux espaces de Banach. On associe à une application linéaire continue $a \in L_c(Z_1 \times Z_2, \mathbb{R})$ l'application $\overline{a} : Z_1 \to Z_2'$, définie pour chaque $z_1 \in Z_1$ par la formule*
$$\overline{a}(z_1)(z_2) = a(z_1, z_2), \quad \forall z_2 \in Z_2.$$
L'application $\overline{a}$ est bijective ssi ${}^t\overline{a} : Z_2 \to Z_1'$ est injective et il existe $\alpha > 0$ tel que
$$|||\overline{a}(z_1)||| \geqslant \alpha |z_1|, \quad \forall z_1 \in Z_1. \tag{0.3}$$

Notez que l'injectivité de ${}^t\overline{a} : Z_2 \to Z_1'$, est équivalente à l'identité $\bigcap_{z_1\in Z_1} \ker \overline{a}(z_1) = \{0\}$ lorsque Z_2 est réflexif ; c'est le cas si Z_2 est un espace de Hilbert.

Démonstration – Supposons $\overline{a}$ bijective. On a d'abord
$$\ker({}^t\overline{a}) = \overline{\Im m(\overline{a})}^{\perp} = 0. \tag{0.4}$$
Le théorème de l'application ouverte nous dit par ailleurs que l'inverse (ensembliste) de l'application $\overline{a}$ est continu, ce que traduit l'estimée (0.3).
Réciproquement, on voit sur l'identité (0.4) que $\Im m(\overline{a})$ est dense dans Z_2'. L'estimée de continuité (0.3) donne à la fois que $\overline{a}$ est injective et que son image est fermée. (Une suite de Cauchy dans l'image de $\overline{a}$ provient d'une suite de Cauchy de Z_1 ; la continuité de $\overline{a}$ fait le reste.) ▷