Principe d'invariance dans les espaces hölderiens

Davide Giraudo

26 janvier 2016

La compréhension du comportement asymptotique des sommes partielles d'une suite strictement stationnaire est un enjeu important en théorie des probabilités. Pour cela, on considère à n fixé la fonction aléatoire qui prend la valeur $\sum_{j=0}^{k-1} X_j$ en k/n, $0 \leqslant k \leqslant n$ et est interpolée linéairement, où $(X_j)_{j \geqslant 0}$ est la suite strictement stationnaire considérée. Ceci définit une fonction aléatoire appelée W_n. Lorsque la suite $(X_j)_{j \geqslant 0}$ est indépendante, centrée et a une variance égale à un, alors la suite $(W_n/\sqrt{n})_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers un mouvement brownien standard W dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ (Donsker, 1951). Autrement dit, pour toute fonctionnelle $F\colon (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ continue et bornée, la convergence

$$\mathbb{E}\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{n}} W_n\right)\right] \to \mathbb{E}\left[F\left(W\right)\right] \tag{*}$$

a lieu.

En vue d'application statistiques telles que la détection de point de rupture, on peut chercher à étendre la convergence (*) à une classe plus large de fonctionnelles F. L'idée de Lamperti (1962) est d'utiliser le caractère hölderien d'exposant strictement inférieur à $1/2$ des trajectoires du mouvement brownien standard et de traiter le principe d'invariance dans l'espace des fonctions hölderiennes. Le cas i.i.d. a été traité par Račkauskas et Suquet (2003).

Dans cet exposé, nous présenterons des conditions suffisantes pour qu'une suite strictement stationnaire vérifie le principe d'invariance dans un espace de fonctions hölderiennes. Nous nous focaliserons dans un premier temps sur le cas des martingales à accroissements strictement stationnaires. Ensuite, nous présenterons deux critères projectifs permettant de montrer le principe d'invariance hölderien *via* une approximation par martingales.