Théorèmes limite sous des conditions de type Maxwell-Woodroofe

Christophe Cuny
en collaboration avec Jérôme Dedecker et Christophe Jan

18 mars 2016

Cadre général

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et θ une transformation inversible bimesurable sur Ω, preservant $\mathbb{P}$ et ergodique.

Cadre général

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et θ une transformation inversible bimesurable sur Ω, preservant $\mathbb{P}$ et ergodique.

Soit $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ une tribu telle que $\mathcal{F}_0 \subset \theta^{-1}(\mathcal{F}_0)$. Etant donné $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ on s'intéresse au comportement ($\mathbb{P}$-p.s. ou en loi) de

$$S_n = S_n(X) = X_0 + \ldots + X_{n-1},$$

où $X_i = X \circ \theta^i$, sous des conditions portant sur $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_0)$.

Cadre général

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et θ une transformation inversible bimesurable sur Ω, preservant $\mathbb{P}$ et ergodique.

Soit $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ une tribu telle que $\mathcal{F}_0 \subset \theta^{-1}(\mathcal{F}_0)$. Etant donné $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ on s'intéresse au comportement ($\mathbb{P}$-p.s. ou en loi) de

$$S_n = S_n(X) = X_0 + \ldots + X_{n-1},$$

où $X_i = X \circ \theta^i$, sous des conditions portant sur $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)$.

Dans le cas où $X_0 = f(W_0)$ avec $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ chaîne de Markov stationnaire d'opérateur P:

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0) = P^n f(W_0).$$

Le théorème de Maxwell-Woodroofe

On considère la condition suivante

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_0)\|_2}{n^{3/2}} < \infty \,. \tag{1}$$

Le théorème de Maxwell-Woodroofe

On considère la condition suivante

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_0)\|_2}{n^{3/2}} < \infty\,. \tag{1}$$

Théorème (Maxwell-Woodroofe (2000), Peligrad-Utev (2005))

Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ satisfaisant (1). Alors, $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où $\sigma^2 = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n^2)/n$. De plus, on a le principe d'invariance (faible).

Le théorème de Maxwell-Woodroofe

On considère la condition suivante

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_0)\|_2}{n^{3/2}} < \infty\,. \tag{1}$$

Théorème (Maxwell-Woodroofe (2000), Peligrad-Utev (2005))

Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ satisfaisant (1). Alors, $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où $\sigma^2 = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n^2)/n$. De plus, on a le principe d'invariance (faible).

Ce résultat améliore considérablement la decomposition martingale-cobord de Gordin-Lifsic (1979) équivalente dans notre cadre à

$$\sup_{n\geq 1} \|\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_0)\|_2 < \infty\,.$$

D'après (Hannan (1979), Dedecker-Volný-Merlevède (2007)) les conclusions du théorèmes ont lieu si

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_2 \to 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{-1})\|_2 < \infty \,. \quad (2)$$

D'après (Hannan (1979), Dedecker-Volný-Merlevède (2007)) les conclusions du théorèmes ont lieu si

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_2 \to 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{-1})\|_2 < \infty\,. \tag{2}$$

Les conditions (1) et (2) sont en particulier vérifiées si

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_2}{\sqrt{n}} < \infty\,. \tag{3}$$

D'après (Hannan (1979), Dedecker-Volný-Merlevède (2007)) les conclusions du théorèmes ont lieu si

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_2 \to 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{-1})\|_2 < \infty \,. \quad (2)$$

Les conditions (1) et (2) sont en particulier vérifiées si

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_2}{\sqrt{n}} < \infty \,. \qquad (3)$$

Les conditions (1), (2) et (3) sont vérifiables dans de nombreuses situations, en pratique.

D'après (Hannan (1979), Dedecker-Volný-Merlevède (2007)) les conclusions du théorèmes ont lieu si

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_2 \to 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{-1})\|_2 < \infty\,. \quad (2)$$

Les conditions (1) et (2) sont en particulier vérifiées si

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_2}{\sqrt{n}} < \infty\,. \qquad (3)$$

Les conditions (1), (2) et (3) sont vérifiables dans de nombreuses situations, en pratique.

Questions :

- A-t-on la LLI sous (1) ? sous (2) ? sous (3) ?

D'après (Hannan (1979), Dedecker-Volný-Merlevède (2007)) les conclusions du théorèmes ont lieu si

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_2 \to 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{-1})\|_2 < \infty \,. \qquad (2)$$

Les conditions (1) et (2) sont en particulier vérifiées si

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_2}{\sqrt{n}} < \infty \,. \qquad (3)$$

Les conditions (1), (2) et (3) sont vérifiables dans de nombreuses situations, en pratique.

Questions :

• A-t-on la LLI sous (1) ? sous (2) ? sous (3) ?

• Quels autres théorèmes limite a-t-on sous des conditions du meme type dans L^p, $p > 1$?

Cas des martingales : Lois fortes de Marcinkiewicz-Zygmund

Théorème (Marcinkiewicz-Zygmund (1937), Woyczyński (1982))

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite stationnaire de différences de martingales telle que* $D_0 \in L^p$, $1 \leq p < 2$. *Alors* $\frac{D_0+\ldots+D_{n-1}}{n^{1/p}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \mathbb{P}$*-p.s.*

Cas des martingales : Lois fortes de Marcinkiewicz-Zygmund

Théorème (Marcinkiewicz-Zygmund (1937), Woyczyński (1982))

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite stationnaire de différences de martingales telle que* $D_0 \in L^p$, $1 \leq p < 2$. *Alors* $\frac{D_0+\ldots+D_{n-1}}{n^{1/p}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \mathbb{P}$*-p.s.*
De plus, il existe $C_p > 0$ *(universel) tel que*

$$\| \sup_{n\geq 1} \frac{|D_0 + \ldots + D_{n-1}|}{n^{1/p}} \|_{p,\infty} \leq C_p \|D_0\|_p \, .$$

On rappelle que $\|Z\|_{p,\infty} = \sup_{\lambda>0} \lambda(\mathbb{P}(Z > \lambda))^{1/p}$.

Théorème (Billingsley (1964-66), Doob (1940))

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire et ergodique de différences de martingales telle que $D_0 \in L^2$. Alors, $(\frac{D_0+\ldots+D_{n-1}}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\mathbb{E}(D_0^2))$. De plus on a un principe d'invariance et pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(\max_{1\leq k\leq n} |D_0 + \ldots + D_{k-1}|^2) \leq 4n\mathbb{E}(D_0^2)\,.$$

Cas des martingales : TCL et LLI

Théorème (Billingsley (1964-66), Doob (1940))

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite stationnaire et ergodique de différences de martingales telle que* $D_0 \in L^2$. *Alors,* $(\frac{D_0+\ldots+D_{n-1}}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ *converge en loi vers* $\mathcal{N}(0, \mathbb{E}(D_0^2))$. *De plus on a un principe d'invariance et pour tout* $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(\max_{1\leq k\leq n} |D_0 + \ldots + D_{k-1}|^2) \leq 4n\mathbb{E}(D_0^2)\,.$$

Théorème (Stout (1973), C. (2015))

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite stationnaire et ergodique de différences de martingales telle que* $D_0 \in L^2$. *Alors,*
$\limsup_{n\to+\infty} \frac{D_0+\ldots+D_{n-1}}{\sqrt{2n\log\log n}} = \|D_0\|_2\,.$

Cas des martingales : TCL et LLI

Théorème (Billingsley (1964-66), Doob (1940))

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire et ergodique de différences de martingales telle que $D_0 \in L^2$. Alors, $(\frac{D_0+\ldots+D_{n-1}}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \mathbb{E}(D_0^2))$. De plus on a un principe d'invariance et pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(\max_{1\leq k\leq n} |D_0 + \ldots + D_{k-1}|^2) \leq 4n\mathbb{E}(D_0^2) \,.$$

Théorème (Stout (1973), C. (2015))

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire et ergodique de différences de martingales telle que $D_0 \in L^2$. Alors,
$\limsup_{n\to+\infty} \frac{D_0+\ldots+D_{n-1}}{\sqrt{2n\log\log n}} = \|D_0\|_2$. *De plus, pour tout $1 \leq r < 2$, il existe $C_r > 0$ (universel) tel que*

$$\|\sup_{n\geq 1} \frac{|D_0 + \ldots + D_{n-1}|}{\sqrt{n\log\log n}}\|_r \leq C_r\|D_0\|_2 \,.$$

Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive croissante. On dit qu'un processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satisfait le principe d'invariance fort controlé par $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s'il existe un espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ sur lequel sont définis $(\tilde{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de même loi que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid normales tels que

$$|\tilde{Y}_n - (W_0 + \ldots + W_{n-1})| = o(r_n) \qquad \mathbb{P}\text{-p.s.}\,,$$

Cas des martingales : principes d'invariance fort

Soit $V_n := \sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}(D_k^2|\mathcal{F}_{k-1}) - \mathbb{E}(D_1^2))$. On dit que $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(*)$ si

$$V_n = o(n^{2/p}) \qquad \mathbb{P}\text{-p.s. , si } 2 \leq p < 4$$
$$V_n = O(\sqrt{n \log\log n}) \quad \mathbb{P}\text{-p.s. , si } p = 4,$$

Cas des martingales : principes d'invariance fort

Soit $V_n := \sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}(D_k^2|\mathcal{F}_{k-1}) - \mathbb{E}(D_1^2))$. On dit que $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(*)$ si

$$V_n = o(n^{2/p}) \qquad \mathbb{P}\text{-p.s. } , \text{ si } 2 \leq p < 4$$
$$V_n = O(\sqrt{n \log\log n}) \quad \mathbb{P}\text{-p.s. } , \text{ si } p = 4,$$

Théorème (Strassen (1964), Shao (1993))

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire de différences de martingales telle que $D_1 \in L^p$, $2 \leq p \leq 4$ et vérifiant $(*)$. Alors, $(D_0 + \ldots + D_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le principe d'invariance fort controlé par $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $r_n = \sqrt{n \log\log n}$ si $p = 2$, $r_n = n^{1/p}\sqrt{\log n}$ si $2 < p < 4$ et $r_n = n^{1/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4}$ si $p = 4$.

Une inégalité maximale ponctuelle

Proposition

Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$. *Pour tout* $k \geq 0$, *on pose*
$u_k := |\mathbb{E}(S_{2^k}|\mathcal{F}_{-2^k})|$ *et*
$d_k := \mathbb{E}(S_{2^k}|\mathcal{F}_{-2^k}) + (\mathbb{E}(S_{2^k}|\mathcal{F}_{-2^k})) \circ \theta^{2^k} - \mathbb{E}(S_{2^{k+1}}|\mathcal{F}_{-2^{k+1}})$.

Proposition

Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$. *Pour tout* $k \geq 0$, *on pose*
$u_k := |\mathbb{E}(S_{2^k}|\mathcal{F}_{-2^k})|$ *et*
$d_k := \mathbb{E}(S_{2^k}|\mathcal{F}_{-2^k}) + (\mathbb{E}(S_{2^k}|\mathcal{F}_{-2^k})) \circ \theta^{2^k} - \mathbb{E}(S_{2^{k+1}}|\mathcal{F}_{-2^{k+1}})$.
Alors, pour tout entier $d \geq 0$, *on a (avec la convention* $\sum_{k=0}^{-1} = 0$*)*

$$\max_{1\leq i\leq 2^d} |S_i| \leq \max_{1\leq i\leq 2^d} \left|\sum_{\ell=0}^{i-1} (X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{-1})) \circ \theta^\ell\right| + \sum_{k=0}^{d-1} \max_{1\leq i\leq 2^{d-k-1}} \left|\sum_{\ell=0}^{i-1} d_k \circ \theta^{2^{k+1}\ell}\right| + u_d + \sum_{k=0}^{d-1} \max_{0\leq \ell\leq 2^{d-1-k}-1} u_k \circ \theta^{2^{k+1}\ell}.$$

Une inégalité maximale ponctuelle (suite)

Posons

$$\mathcal{M}_p(Z,\tau) = \sup_{n\geq 1} \frac{|Z + \ldots + Z \circ \tau^{n-1}|}{u_n(p)}$$

avec, pour $1 \leq p < 2$, $\quad u_n(p) = n^{1/p}$

et $\quad u_n(2) = \sqrt{n \log\log n}.$

Une inégalité maximale ponctuelle (suite)

Posons

$$\mathcal{M}_p(Z,\tau) = \sup_{n\geq 1} \frac{|Z + \ldots + Z\circ\tau^{n-1}|}{u_n(p)}$$

avec, pour $1 \leq p < 2$, $\qquad u_n(p) = n^{1/p}$

et $\qquad u_n(2) = \sqrt{n \log\log n}.$

Proposition

En particulier, il existe $C > 0$, tel que pour tout $1 \leq p \leq 2$,

$$\mathcal{M}_p(X,\theta) \leq C\Big(\sum_{k\geq 0} \frac{u_k}{2^{k/p}} + \sum_{k\geq 0} \frac{\big(\mathcal{M}_1(u_k^p, \theta^{2^{k+1}})\big)^{1/p}}{2^{k/p}} + \mathcal{M}_p(X - \mathbb{E}_{-1}(X), \theta) + \sum_{k\geq 0} \frac{\mathcal{M}_p(d_k, \theta^{2^{k+1}})}{2^{k/p}}\Big),$$

Conséquences

Pour tout $1 \leq p \leq 2$, on pose

$$\|X\|_{MW_p} := \sum_{n\geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_0)\|_p}{n^{1+1/p}} .$$

Pour tout $1 \leq p \leq 2$, on pose

$$\|X\|_{MW_p} := \sum_{n\geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_0)\|_p}{n^{1+1/p}} \,.$$

Théorème

Il existe $C_p > 0$, tel que pour tout $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$,

$$\|\mathcal{M}_p(X,\theta)\|_{p,\infty} \leq C_p \|X\|_{MW_p} \,.$$

En particulier, si $\|X\|_{MW_p} < \infty$, alors

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Idée de preuve

Soit l'espace de Banach

$$MW_p := \{X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}) \; : \; \|X\|_{MW_p} < \infty\}$$

On définit une contraction Q sur MW_p en posant

$$QX := \mathbb{E}(X \circ \theta | \mathcal{F}_0), \quad \text{pour tout } X \in MW_p.$$

Idée de preuve

Soit l'espace de Banach

$$MW_p := \{X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}) \,:\, \|X\|_{MW_p} < \infty\}$$

On définit une contraction Q sur MW_p en posant

$$QX := \mathbb{E}(X \circ \theta | \mathcal{F}_0), \quad \text{pour tout } X \in MW_p.$$

On a alors $\quad \|X\|_{MW_p} = \sum_{n \geq 1} \frac{\|X + \cdots + Q^{n-1}X\|_p}{n^{1+1/p}}$

et $\quad MW_p = \overline{(I - Q)MW_p}^{MW_p}.$

Idée de preuve

Soit l'espace de Banach

$$MW_p := \{X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}) \, : \, \|X\|_{MW_p} < \infty\}$$

On définit une contraction Q sur MW_p en posant

$$QX := \mathbb{E}(X \circ \theta | \mathcal{F}_0), \qquad \text{pour tout } X \in MW_p.$$

On a alors $$\|X\|_{MW_p} = \sum_{n \geq 1} \frac{\|X + \cdots + Q^{n-1}X\|_p}{n^{1+1/p}}$$

et $$MW_p = \overline{(I - Q)MW_p}^{MW_p}.$$

Soit $X = (I - Q)Y$ avec $Y \in MW_p$. Alors

$$X = (Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_{-1})) + (\mathbb{E}(Y \circ \theta|\mathcal{F}_0) \circ \theta^{-1} - \mathbb{E}(Y \circ \theta|\mathcal{F}_0))$$

est une décomposition martingale-cobord.

Conséquences

Théorème

Il existe $C > 0$, tel que pour tout $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$,

$$\|\mathcal{M}_2(X,\theta)\|_{2,\infty} \leq C\|X\|_{MW_2}\,.$$

Conséquences

Théorème

Il existe $C > 0$, tel que pour tout $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$,

$$\|\mathcal{M}_2(X,\theta)\|_{2,\infty} \leq C\|X\|_{MW_2} \,.$$

De plus, si $\|X\|_{MW_2} < \infty$, il existe une suite stationnaire $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de différences de martingales avec $\mathbb{E}(D_1^2) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n^2)/n$ telle que

$$|S_n - (D_0 + \ldots + D_{n-1})| = o(\sqrt{n \log\log n}) \qquad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

En particulier on a le principe d'invariance fort.

Vitesse dans le principe d'invariance fort

Soit $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$, $p > 2$ tel que

$$\sum_{n \geq 0} \|\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_0)\|_p < \infty. \tag{4}$$

Vitesse dans le principe d'invariance fort

Soit $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$, $p > 2$ tel que

$$\sum_{n \geq 0} \|\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_0)\|_p < \infty. \tag{4}$$

Alors il existe une différence de martingale $D \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ (i.e. $\mathbb{E}(D|\mathcal{F}_{-1}) = 0$), telle que, posant $M_n := D_0 + \ldots + D_{n-1}$

$$|S_n - M_n| = o(n^{1/p}) \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Vitesse dans le principe d'invariance fort

Soit $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$, $p > 2$ tel que

$$\sum_{n\geq 0} \|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_p < \infty. \tag{4}$$

Alors il existe une différence de martingale $D \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ (i.e. $\mathbb{E}(D|\mathcal{F}_{-1}) = 0$), telle que, posant $M_n := D_0 + \ldots + D_{n-1}$

$$|S_n - M_n| = o(n^{1/p}) \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Si, de plus, $\sum_{n\geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(M_n^2|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(M_n^2)\|_{p/2}}{n^{1+2/p}} < \infty,$

on a le principe d'invariance fort avec les mêmes contrôles que dans le cas martingale.

Vitesse dans le principe d'invariance fort

Soit $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$, $p > 2$ tel que

$$\sum_{n \geq 0} \|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_p < \infty. \qquad (4)$$

Alors il existe une différence de martingale $D \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ (i.e. $\mathbb{E}(D|\mathcal{F}_{-1}) = 0$), telle que, posant $M_n := D_0 + \ldots + D_{n-1}$

$$|S_n - M_n| = o(n^{1/p}) \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Si, de plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(M_n^2|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(M_n^2)\|_{p/2}}{n^{1+2/p}} < \infty$,

on a le principe d'invariance fort avec les mêmes contrôles que dans le cas martingale.

Lorsque $2 < p < 4$, cette dernière condition est vérifié si en plus de (4) on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\|\mathbb{E}(S_n^2|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(S_n^2)\|_{p/2}}{n^{1+2/p}} < \infty$$

Produits de matrices aléatoires : LFGN

Soit μ une mesure de probabilité sur $G = GL_d(\mathbb{R})$, $d \geq 2$, et Γ_μ le semi-groupe fermé engendré par le support de μ.

Soit μ une mesure de probabilité sur $G = GL_d(\mathbb{R})$, $d \geq 2$, et Γ_μ le semi-groupe fermé engendré par le support de μ. On dit que μ a un moment d'ordre $p \geq 1$, si,

$$\int_G \log^p(N(g))\, \mu(dg) < \infty, \text{ où } N(g) := \max(\|g\|, \|g^{-1}\|) \ .$$

Produits de matrices aléatoires : LFGN

Soit μ une mesure de probabilité sur $G = GL_d(\mathbb{R})$, $d \geq 2$, et Γ_μ le semi-groupe fermé engendré par le support de μ. On dit que μ a un moment d'ordre $p \geq 1$, si,

$$\int_G \log^p(N(g))\,\mu(dg) < \infty, \text{ où } N(g) := \max(\|g\|, \|g^{-1}\|)\ .$$

Proposition (Furstenberg (?), Furstenberg-Kiffer (1983))

Soit μ admettant un moment d'ordre 1 et $(Y_n)_{n\geq 1}$ iid de loi μ. Alors

$$\frac{\log \| Y_n \cdots Y_1 \|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_\mu \qquad \mathbb{P}\text{-}p.s.\,,$$

où $\lambda_\mu = \inf_{n\geq 1} \mathbb{E}(\log \| Y_n \cdots Y_1 \|)/n$.

Soit μ une mesure de probabilité sur $G = GL_d(\mathbb{R})$, $d \geq 2$, et Γ_μ le semi-groupe fermé engendré par le support de μ. On dit que μ a un moment d'ordre $p \geq 1$, si,

$$\int_G \log^p(N(g))\,\mu(dg) < \infty, \text{ où } N(g) := \max(\|g\|, \|g^{-1}\|) \;.$$

Proposition (Furstenberg (?), Furstenberg-Kiffer (1983))

Soit μ admettant un moment d'ordre 1 et $(Y_n)_{n\geq 1}$ iid de loi μ. Alors

$$\frac{\log \|Y_n \cdots Y_1\|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_\mu \qquad \mathbb{P}\text{-p.s.}\,,$$

où $\lambda_\mu = \inf_{n\geq 1} \mathbb{E}(\log \|Y_n \cdots Y_1\|)/n$. Si, de plus il n'existe pas de sous-espace non trivial de $\mathbb{R}^d$ invariant par Γ_μ, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\log \|Y_n \cdots Y_1 x\|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_\mu \qquad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

L'action sur $P(\mathbb{R}^d)$

G agit naturellement sur $X = P(\mathbb{R}^d)$ l'espace projectif (compact) de $\mathbb{R}^d$. On note cette action par $\diamond$, et par $*$ le produit de convolution des probabilités qu'elle induit.

On dit qu'une probabilité ν sur X est μ-invariante, si $\mu * \nu = \nu$.

G agit naturellement sur $X = P(\mathbb{R}^d)$ l'espace projectif (compact) de $\mathbb{R}^d$. On note cette action par $\diamond$, et par $*$ le produit de convolution des probabilités qu'elle induit.

On dit qu'une probabilité ν sur X est μ-invariante, si $\mu * \nu = \nu$.

On dit que μ est fortement irréductible s'il n'exite pas d'union finie de sous-espaces (non triviaux) de $\mathbb{R}^d$ stable par Γ_μ.

L'action sur $P(\mathbb{R}^d)$

G agit naturellement sur $X = P(\mathbb{R}^d)$ l'espace projectif (compact) de $\mathbb{R}^d$. On note cette action par $\diamond$, et par $*$ le produit de convolution des probabilités qu'elle induit.

On dit qu'une probabilité ν sur X est μ-invariante, si $\mu * \nu = \nu$.

On dit que μ est fortement irréductible s'il n'exite pas d'union finie de sous-espaces (non triviaux) de $\mathbb{R}^d$ stable par Γ_μ.

On dit que μ est proximale si Γ_μ contient une matrice ayant une unique valeur propre (de multiplicité 1) de module maximum.

L'action sur $P(\mathbb{R}^d)$

G agit naturellement sur $X = P(\mathbb{R}^d)$ l'espace projectif (compact) de $\mathbb{R}^d$. On note cette action par $\diamond$, et par $*$ le produit de convolution des probabilités qu'elle induit.

On dit qu'une probabilité ν sur X est μ-invariante, si $\mu * \nu = \nu$.

On dit que μ est fortement irréductible s'il n'exite pas d'union finie de sous-espaces (non triviaux) de $\mathbb{R}^d$ stable par Γ_μ.

On dit que μ est proximale si Γ_μ contient une matrice ayant une unique valeur propre (de multiplicité 1) de module maximum.

Si μ est fortement irréductible et proximale, alors il existe une unique mesure invariante ν sur X et

$$\lambda_\mu = \int_{G\times X} \sigma(g,u)\mu(dg)\nu(du)$$

où, pour tout $(g,u) \in G \times X$, avec $u = \mathbb{R}x$,

$$\sigma(g,u) = \log(\|gx\|/\|x\|).$$

Le TCL

Théorème (Le Page (1982), Guivarc'h-Raugi (1985))

Soit μ fortement irréductible et proximale sur G telle que $\int_G N(g)^\alpha \mu(dg) < \infty$, pour un $\alpha > 0$. Alors, il existe $C > 0$ et $\delta \geq 0$ tel que

$$\sup_{\|x\|=1} \left| \mathbb{P}\left(\frac{\log \|Y_n \cdots Y_1 x\| - n\lambda_\mu}{\sqrt{n}} \leq t \right) - \phi_\delta(t) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

où ϕ_δ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, \delta^2)$. De plus on a le principe d'invariance.

Le TCL

Théorème (Benoist-Quint, à paraître dans Ann. Probab.)

Soit μ fortement irréductible et proximale sur G, admettant un moment d'ordre 2. Alors, il existe $\delta \geq 0$ tel que

$$\sup_{\|x\|=1} \left| \mathbb{P}\left(\frac{\log \|Y_n \cdots Y_1 x\| - n\lambda_\mu}{\sqrt{n}} \leq t \right) - \phi_\delta(t) \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, on a le principe d'invariance.

Théorème (Benoist-Quint, à paraître dans Ann. Probab.)

Soit μ fortement irréductible et proximale sur G, admettant un moment d'ordre 2. Alors, il existe $\delta \geq 0$ tel que

$$\sup_{\|x\|=1} \left| \mathbb{P}\left(\frac{\log \|Y_n \cdots Y_1 x\| - n\lambda_\mu}{\sqrt{n}} \leq t \right) - \phi_\delta(t) \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, on a le principe d'invariance.

Le TCL a été obtenu par Christophe Jan dans sa Thèse (2001) sous un moment d'ordre $2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

De plus, sous des moments polynomiaux de tout ordre il a obtenu des vitesses polynomiales dans le TCL arbitrairement proche de $n^{-1/2}$.

Théorème (C-Dedecker-Jan)

Soit μ fortement irréductible et proximale sur G, admettant un moment d'ordre $p \geq 1$.

(*i*) *Si $1 \leq p < 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\frac{\log \|Y_n \dots Y_n x\| - n\lambda_\mu}{n^{1/p}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Théorème (C-Dedecker-Jan)

Soit μ fortement irréductible et proximale sur G, admettant un moment d'ordre $p \geq 1$.

(i) *Si $1 \leq p < 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\frac{\log \|Y_n \dots Y_n x\| - n\lambda_\mu}{n^{1/p}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

(ii) *Si $2 \leq p \leq 4$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $(\log \|Y_n \dots Y_n x\| - n\lambda_\mu)_{n\geq 1}$ satisfait au principe d'invariance fort avec mêmes contrôles que dans le cas martingale.*

Soit $\Omega := X \times G^{\mathbb{N}^*}$ muni de la tribu produit. Pour toute probabilité τ sur X on note $\mathbb{P}_\tau$ la probabilité $\tau \otimes \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.

Une chaîne de Markov

Soit $\Omega := X \times G^{\mathbb{N}^*}$ muni de la tribu produit. Pour toute probabilité τ sur X on note $\mathbb{P}_\tau$ la probabilité $\tau \otimes \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le processus coordonné sur Ω. Soit η la transformation mesurable définie sur Ω par

$$\eta((u, g_1, g_2, \ldots)) = (g_1 \diamond u, g_2, g_3, \ldots)$$

Une chaîne de Markov

Soit $\Omega := X \times G^{\mathbb{N}^*}$ muni de la tribu produit. Pour toute probabilité τ sur X on note $\mathbb{P}_\tau$ la probabilité $\tau \otimes \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le processus coordonné sur Ω. Soit η la transformation mesurable définie sur Ω par

$$\eta((u, g_1, g_2, \ldots)) = (g_1 \diamond u, g_2, g_3, \ldots)$$

Une chaîne de Markov

Soit $\Omega := X \times G^{\mathbb{N}^*}$ muni de la tribu produit. Pour toute probabilité τ sur X on note $\mathbb{P}_\tau$ la probabilité $\tau \otimes \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le processus coordonné sur Ω. Soit η la transformation mesurable définie sur Ω par

$$\eta((u, g_1, g_2, \ldots)) = (g_1 \diamond u, g_2, g_3, \ldots)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n := Y_0 \circ \eta^n = Y_n \cdots Y_1 \diamond W_0$.

Une chaîne de Markov

Soit $\Omega := X \times G^{\mathbb{N}^*}$ muni de la tribu produit. Pour toute probabilité τ sur X on note $\mathbb{P}_\tau$ la probabilité $\tau \otimes \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le processus coordonné sur Ω. Soit η la transformation mesurable définie sur Ω par

$$\eta((u, g_1, g_2, \ldots)) = (g_1 \diamond u, g_2, g_3, \ldots)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n := Y_0 \circ \eta^n = Y_n \cdots Y_1 \diamond W_0$.

Alors, $(Y_n, W_{n-1})_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov stationnaire (de mesure stationnaire $\mu \otimes \nu$) et ergodique.

Une chaîne de Markov

Soit $\Omega := X \times G^{\mathbb{N}^*}$ muni de la tribu produit. Pour toute probabilité τ sur X on note $\mathbb{P}_\tau$ la probabilité $\tau \otimes \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le processus coordonné sur Ω. Soit η la transformation mesurable définie sur Ω par

$$\eta((u, g_1, g_2, \ldots)) = (g_1 \diamond u, g_2, g_3, \ldots)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n := Y_0 \circ \eta^n = Y_n \cdots Y_1 \diamond W_0$.

Alors, $(Y_n, W_{n-1})_{n \geq 1}$ est une chaîne de Markov stationnaire (de mesure stationnaire $\mu \otimes \nu$) et ergodique. De plus, pour tout $u = \mathbb{R}x \in X$, on a

$$\log(\|Y_n \cdots Y_1 x\| / \|x\|) = \sum_{k=1}^{n} \sigma(Y_k, W_{k-1}) \quad \mathbb{P}_u\text{-p.s.}$$

Régularité du cocycle

On munit X de la métrique suivante (compatible avec la topologie induite de $\mathbb{R}^d$)

$$d(u,v) = \frac{\|x \wedge y\|}{\|x\|\,\|y\|}, \qquad \text{pour tout } u = \mathbb{R}x, v = \mathbb{R}y \in X.$$

Régularité du cocycle

On munit X de la métrique suivante (compatible avec la topologie induite de $\mathbb{R}^d$)

$$d(u, v) = \frac{\|x \wedge y\|}{\|x\| \, \|y\|}, \qquad \text{pour tout } u = \mathbb{R}x, v = \mathbb{R}y \in X.$$

Alors, il existe $C > 0$ tel que pour tous $u, v \in X$ et tout $g \in G$,

$$|\sigma(g, u) - \sigma(g, v)| \leq CN(g)d(u, v)$$

Régularité du cocycle

On munit X de la métrique suivante (compatible avec la topologie induite de $\mathbb{R}^d$)

$$d(u,v) = \frac{\|x \wedge y\|}{\|x\|\,\|y\|}, \qquad \text{pour tout } u = \mathbb{R}x, v = \mathbb{R}y \in X.$$

Alors, il existe $C > 0$ tel que pour tous $u, v \in X$ et tout $g \in G$,

$$|\sigma(g,u) - \sigma(g,v)| \leq CN(g)d(u,v)$$

Pour tout $\kappa > 0$, il existe $C_\kappa > 0$ tel que pour tous $u, v \in X$ et tout $g \in G$,

$$|\sigma(g,u) - \sigma(g,v)| \leq C(1 + \log^{\kappa+1} N(g))H_\kappa(d(u,v)),$$

où $\qquad H_\kappa(z) = |\log(z/2)|^{-\kappa}.$

Controle des "termes projectifs"

Posons $X_n := \sigma(Y_n, W_{n-1}) - \lambda_\mu$, $A_n = Y_n \cdots Y_1$ et $\mathcal{F}_0 := \sigma\{Y_0\}$.
Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_p \leq \sup_{u,v\in X} \mathbb{E}(|\sigma(Y_n, A_{n-1} \diamond u) - \sigma(Y_n, A_{n-1} \diamond v)|)$$

Controle des "termes projectifs"

Posons $X_n := \sigma(Y_n, W_{n-1}) - \lambda_\mu$, $A_n = Y_n \cdots Y_1$ et $\mathcal{F}_0 := \sigma\{Y_0\}$. Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_p \leq \sup_{u,v\in X} \mathbb{E}(|\sigma(Y_n, A_{n-1}\diamond u) - \sigma(Y_n, A_{n-1}\diamond v)|)$$

D'après l'estimation précédente, il vient que pour tout $\kappa > 1$, si μ a un moment d'ordre κ,

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_p \leq C_\kappa \sup_{u,v\in X} \mathbb{E}\Big(H_\kappa(d(A_{n-1}\diamond u, A_{n-1}\diamond v)\Big)$$

Controle des "termes projectifs"

Posons $X_n := \sigma(Y_n, W_{n-1}) - \lambda_\mu$, $A_n = Y_n \cdots Y_1$ et $\mathcal{F}_0 := \sigma\{Y_0\}$. Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_p \leq \sup_{u,v\in X} \mathbb{E}(|\sigma(Y_n, A_{n-1}\diamond u) - \sigma(Y_n, A_{n-1}\diamond v)|)$$

D'après l'estimation précédente, il vient que pour tout $\kappa > 1$, si μ a un moment d'ordre κ,

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_0)\|_p \leq C_\kappa \sup_{u,v\in X} \mathbb{E}\Big(H_\kappa(d(A_{n-1}\diamond u, A_{n-1}\diamond v)\Big)$$

D'après Jan (2001), pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$\sup_{u,v\in X} \mathbb{E}\Big(H_\kappa(d(A_{n-1}\diamond u, A_{n-1}\diamond v)\Big) \leq \frac{C_\alpha}{n^{\kappa(\alpha-1/2)}}$$