

# Une introduction à la géométrie torique

Carl Tipler

UNIVERSITÉ DE BREST

*E-mail addresses:* `carl.tipler@univ-brest.fr`

RÉSUMÉ. Ces notes de cours sont issues d'un cours de M2 sur la géométrie torique donné en 2021 à l'université de Rennes.

La géométrie torique est un riche sujet à l'intersection de différentes branches des mathématiques telles que la géométrie algébrique, la géométrie symplectique, la géométrie et l'analyse convexe, la combinatoire, etc. Le point de vu de ce cours est celui de la géométrie algébrique, et on se restreindra dans tout le cours au corps des nombres complexes.

Les objets étudiés sont les *variétés toriques*, variétés complexes munies d'une action effective d'un tore complexe avec une orbite ouverte et dense. L'existence de cette action simplifie drastiquement leur description : elles sont encodées par des *éventails* de *cones polyédraux strictement convexes* dans un espace vectoriel réel. Ces objets issus de la géométrie convexe fournissent un nouveau langage dans notre dictionnaire algèbro-géométrique pour décrire les variétés toriques. Celui ci permet d'obtenir des preuves simples de résultats profonds, et donne également de manière explicite une riche famille d'exemples de variétés algébriques.

Malgré le fait que les variétés toriques sont très particulières dans le spectre des variétés algébriques, elles donnent une bonne classe d'exemples pour se familiariser avec de nombreux concepts, et également, de manière plus ambitieuse, pour tester des théories nouvelles et des conjectures.

## Table des matières

Chapitre I. Rappels sur les variétés	5
1. Variétés affines	5
2. Variétés abstraites	11
Chapitre II. Tores complexes	17
1. Le tore complexe	17
2. Tores abstraits	18
Chapitre III. Variétés toriques affines	21
1. Construction de variétés affines toriques	21
2. Cônes et variétés affines toriques	28
3. Propriétés des variétés toriques affines	36
Chapitre IV. Variétés toriques	45
1. Éventails et variétés toriques normales	45
2. Correspondance orbites-cônes	49
3. Morphismes toriques	55
Chapitre V. Surfaces toriques	61
1. Classification des surfaces toriques complètes lisses	61
Bibliographie	65



## Rappels sur les variétés

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de géométrie algébrique qui seront utilisées dans ce cours. Les preuves des résultats énoncés peuvent être trouvées dans [CLO].

### 1. Variétés affines

Soit  $n$  un entier positif.

**1.1. Premières définitions.** L'espace affine de dimension  $n$  sur  $\mathbb{C}$  est l'ensemble

$$\mathbb{C}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{C}\}.$$

Soient  $f_1, \dots, f_s$  des polynômes de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . On pose

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, s\}\}.$$

On appelle  $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)$  la *variété affine* définie par les polynômes  $f_1, \dots, f_s$ . Ces variétés affines sont les cartes locales qui permettent de définir les variétés algébriques, objets d'étude de ce cours. On note tout d'abord que l'ensemble des variétés affines est stable par union et intersection.

LEMME I.1.1. *Si  $V$  et  $W$  sont des variétés affines alors,  $V \cup W$  et  $V \cap W$  sont des variétés affines. De plus, si  $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)$  et  $W = \mathbb{V}(g_1, \dots, g_t)$ , alors :*

$$V \cap W = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t) \quad \text{et} \quad V \cup W = \mathbb{V}(f_i g_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t).$$

EXERCICE I.1.2. Démontrer le Lemme I.1.1.

L'objet algébrique qui définit une variété est un idéal :

DÉFINITION I.1.3. Un sous-ensemble  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  est un idéal si

- (1)  $I$  est un sous-groupe de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  (pour l'addition),
- (2)  $\forall f \in I, \forall h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], hf \in I$ .

On rappelle que  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  est noethérien, et donc que tout idéal  $I$  de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  admet une base, c'est à dire une famille génératrice finie de  $I$  (en tant que module sur  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ) :

THÉORÈME I.1.4 (théorème de la base de Hilbert). *Tout idéal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  admet un ensemble fini de générateurs, c'est-à-dire, il existe  $g_1, \dots, g_t \in I$  tel que*

$$I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$$

où

$$\langle g_1, \dots, g_t \rangle := \{h_1 g_1 + \dots + h_t g_t, h_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}.$$

Les bases d'un même idéal définissent la même variété affine.

LEMME I.1.5. Si  $f_1, \dots, f_s$  et  $g_1, \dots, g_t$  sont des bases du même idéal, c'est-à-dire si

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_t \rangle,$$

alors

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) = \mathbb{V}(g_1, \dots, g_t).$$

EXERCICE I.1.6. Démontrer le Lemme précédent.

On peut alors définir :

DÉFINITION I.1.7. Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . On note  $\mathbb{V}(I)$  la variété affine associée à  $I$ , définie par :

$$\mathbb{V}(I) := \{a \in \mathbb{C}^n \mid \forall f \in I, f(a) = 0\}.$$

Inversement, on obtient un idéal à partir d'une variété affine.

DÉFINITION I.1.8. Soit  $V \subset \mathbb{C}^n$  une variété affine. On pose

$$\mathbb{I}(V) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid \forall a \in V, f(a) = 0\}.$$

L'ensemble  $\mathbb{I}(V)$  est appelé *idéal de  $V$* .

EXERCICE I.1.9. Vérifier que  $\mathbb{I}(V)$  est un idéal.

Le lemme suivant est immédiat.

LEMME I.1.10. Si  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , alors  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{I}(\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s))$ .

EXERCICE I.1.11. Donner un exemple où l'inclusion du lemme ci-dessus est stricte.

La donnée  $V \mapsto \mathbb{I}(V)$  renverse les inclusions :

PROPOSITION I.1.12. Si  $V \subset W$  sont deux variétés affines de  $\mathbb{C}^n$ , alors  $\mathbb{I}(W) \subset \mathbb{I}(V)$ .

**1.2. Correspondance entre idéaux et variétés affines.** Pour un idéal engendré par  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  on peut construire la variété affine  $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)$ . Inversement, si l'on se donne une variété affine  $V$  de  $\mathbb{C}^n$ , on construit un idéal  $\mathbb{I}(V)$  de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Le Nullstellensatz de Hilbert permet de faire une correspondance entre ces deux constructions, en ajoutant une restriction sur les idéaux considérés. On considère les applications

$$\begin{aligned} \mathbb{I} : \{ \text{variétés affines de } \mathbb{C}^n \} &\rightarrow \{ \text{idéaux de } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \} \\ V &\mapsto \mathbb{I}(V) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{V} : \{ \text{idéaux de } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \} &\rightarrow \{ \text{variétés affines de } \mathbb{C}^n \} \\ I &\mapsto \mathbb{V}(I). \end{aligned}$$

Les résultats fondamentaux sont les suivants :

THÉORÈME I.1.13 (Nullstellensatz faible). Si un idéal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  vérifie  $\mathbb{V}(I) = \emptyset$ , alors  $I = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

THÉORÈME I.1.14 (Nullstellensatz de Hilbert). Si  $f, f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  sont tels que  $f \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s))$ , alors il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^m \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ .

Ce dernier motive la définition suivante :

DÉFINITION I.1.15. Un idéal  $I$  est *radical* si pour tout  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $f^m \in I$  pour un certain  $m \in \mathbb{N}^*$  entraîne  $f \in I$ .

LEMME I.1.16. Soit  $V$  une variété affine.  $\mathbb{I}(V)$  est un idéal radical.

DÉFINITION I.1.17. Soit  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  un idéal. Le radical de  $I$ , noté  $\sqrt{I}$ , est l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid \exists m \in \mathbb{N}^*, f^m \in I\}.$$

LEMME I.1.18.  $\sqrt{I}$  est un idéal radical de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

On peut alors reformuler le résultat de Hilbert :

THÉORÈME I.1.19 (Nullstellensatz fort). Si  $I$  est un idéal de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , alors

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

De là découle la correspondance entre idéaux et variétés.

THÉORÈME I.1.20 (Correspondance idéaux-variétés). On a les résultats suivants pour les applications  $\mathbb{I}$  et  $\mathbb{V}$  :

- (1)  $\mathbb{I}$  et  $\mathbb{V}$  renversent l'inclusion.
- (2) Pour toute variété affine  $V$ , on a  $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = V$  (en particulier  $\mathbb{I}$  est injective).
- (3) Les applications

$$\begin{aligned} \mathbb{I} : \{\text{variétés affines de } \mathbb{C}^n\} &\rightarrow \{\text{idéaux radicaux de } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\} \quad \text{et} \\ \mathbb{V} : \{\text{idéaux radicaux de } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\} &\rightarrow \{\text{variétés affines de } \mathbb{C}^n\} \end{aligned}$$

sont des bijections réciproques.

### 1.3. Variétés irréductibles et idéaux premiers.

DÉFINITION I.1.21. Une variété affine  $V \subset \mathbb{C}^n$  est dite *irréductible* si pour toute égalité  $V = V_1 \cup V_2$  où  $V_1$  et  $V_2$  sont des variétés affines de  $\mathbb{C}^n$ , on a  $V = V_1$  ou  $V = V_2$ .

DÉFINITION I.1.22. Un idéal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  est dit *premier* si  $\forall f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , si  $fg \in I$ , alors  $f \in I$  ou  $g \in I$ .

PROPOSITION I.1.23. Soit  $V \subset \mathbb{C}^n$  une variété affine. Alors,  $V$  est irréductible si et seulement si  $\mathbb{I}(V)$  est un idéal premier.

EXERCICE I.1.24. Démontrer la proposition précédente.

Les fonction  $\mathbb{I}$  et  $\mathbb{V}$  induisent donc une correspondance entre les variétés affines irréductibles de  $\mathbb{C}^n$  et les idéaux premiers de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Parmi les idéaux premiers, les idéaux maximaux jouent un rôle particulier.

DÉFINITION I.1.25. Un idéal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  est dit *maximal* si  $I \neq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  et si tout idéal  $J$  contenant  $I$  est tel que  $J = I$  ou  $J = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Un idéal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  est dit *propre* si  $I \neq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

EXERCICE I.1.26. Un idéal maximal de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  est premier.

PROPOSITION I.1.27. L'idéal  $I = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  où  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  est maximal.

En fait, on a la réciproque :

THÉORÈME I.1.28. *Tout idéal maximal de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  est de la forme*

$$\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \quad \text{où } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} .$$

Il y a donc une correspondance entre les idéaux maximaux de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  et les points de  $\mathbb{C}^n$ . Afin d'étendre ce résultat et caractériser les points d'une variété affine, on a besoin de l'anneau de coordonnées d'une variété.

**1.4. Anneau de coordonnées d'une variété affine.** Pour étudier certaines notions géométriques d'une variété affine, il est plus commode d'utiliser son anneau de coordonnées, plutôt que son idéal.

DÉFINITION I.1.29. Soient  $V \subset \mathbb{C}^m$  et  $W \subset \mathbb{C}^n$  deux variétés affines. Une fonction  $\Phi : V \rightarrow W$  est dite *application polynomiale* ou *application régulière* s'il existe  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  telles que pour tout  $a \in V$ ,

$$\Phi(a_1, \dots, a_m) = (f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m)) .$$

On dit que  $(f_1, \dots, f_n)$  représente  $\Phi$ .

PROPOSITION I.1.30. *Soit  $V \subset \mathbb{C}^n$  une variété affine. Alors,*

- (1)  $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  représentent la même fonction polynomiale sur  $V$  si et seulement si  $f - g \in \mathbb{I}(V)$ .
- (2)  $(f_1, \dots, f_n)$  et  $(g_1, \dots, g_n)$  représentent la même application polynomiale de  $V$  vers  $\mathbb{C}^n$  si et seulement si  $f_i - g_i \in \mathbb{I}(V)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

On note  $\mathbb{C}[V]$  la collection des fonctions polynomiales définies sur  $V$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

DÉFINITION I.1.31. On appelle  $\mathbb{C}[V]$  l'*anneau de coordonnées* (ou anneau des fonctions régulières) de la variété affine  $V$ .

LEMME I.1.32. *Soit  $V$  une variété affine, alors  $\mathbb{C}[V] \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\mathbb{I}(V)$ .*

PROPOSITION I.1.33. *Soit  $V$  une variété affine. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $V$  est irréductible ;
- (2)  $\mathbb{I}(V)$  est un idéal premier ;
- (3)  $\mathbb{C}[V]$  est un anneau intègre.

EXERCICE I.1.34. Prouver le lemme et la proposition précédents.

La correspondance entre variétés et idéaux donne alors :

PROPOSITION I.1.35. *Deux variétés affines sont isomorphes si et seulement si leurs anneaux de coordonnées sont isomorphes.*

De plus, les anneaux de coordonnées de variétés affines peuvent être caractérisés parmi les  $\mathbb{C}$ -algèbres :

PROPOSITION I.1.36. *Une  $\mathbb{C}$ -algèbre  $R$  est isomorphe à l'anneau de coordonnées d'une variété affine si et seulement si  $R$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini sans nilpotent non-nul.*

Par ailleurs, on peut caractériser les points d'une variété affine à l'aide de son anneau de coordonnées :



PROPOSITION I.1.37. Soit  $V$  une variété affine. Pour tout point  $p \in V$ , l'ensemble

$$\{f \in \mathbb{C}[V] \mid f(p) = 0\}$$

est un idéal maximal de  $\mathbb{C}[V]$ . Tout idéal maximal de  $\mathbb{C}[V]$  est de cette forme.

REMARQUE I.1.38. Afin de souligner le lien entre  $V$  et  $\mathbb{C}[V]$ , on notera

$$V = \text{Spec}(\mathbb{C}[V]).$$

Le foncteur  $\text{Spec}$  peut être défini pour toute  $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini sans nilpotent  $R$  en posant  $\text{Spec}(R)$  l'ensemble de ces idéaux maximaux. En principe, la construction de  $\text{Spec}$  nécessite de considérer tous les idéaux premiers (dans ce cas, notre  $\text{Spec}$  serait plutôt noté  $\text{Specm}$  pour préciser la restriction sur les idéaux maximaux). Comme notre cours ne fera pas intervenir les schemas, cette restriction n'a pas d'importance.

**1.5. Topologie de Zariski.** Les variétés que l'on considèrera disposeront de deux topologies, la topologie usuelle (induite par celle de  $\mathbb{C}^n$ ) et celle de Zariski. Soit  $V$  une variété affine de  $\mathbb{C}^n$ .

DÉFINITION I.1.39. Une sous-variété  $W \subset V$  de  $V$  est la donnée d'une variété affine  $W$  de  $\mathbb{C}^n$  incluse dans  $V$ .

DÉFINITION I.1.40. Soit  $V$  une variété affine. Sa topologie de Zariski est la topologie dont les fermés sont donnés par les sous-variétés de  $V$ .

EXERCICE I.1.41. Montrer que la topologie de Zariski est plus grossière que la topologie usuelle.

On donne quelques résultats et définition utiles sur la topologie de Zariski.

PROPOSITION I.1.42. Soit  $S \subset \mathbb{C}^n$ . La variété affine  $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$  est la plus petite variété affine contenant  $S$ .

DÉFINITION I.1.43. La clôture de Zariski d'un sous-ensemble  $S \subset \mathbb{C}^n$  est la plus petite variété affine contenant  $S$ ; on la note  $\bar{S}$ . On a  $\bar{S} = \mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$ .

PROPOSITION I.1.44. Si  $V$  et  $W$  sont des variétés affines tel que  $V \subset W$ , alors  $W = \overline{V \cup (W - V)}$ .

Soient  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[V]$ . Ces fonctions régulières induisent une application polynomiale  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}^s$  définie par  $\Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_s(x))$ . La correspondance entre variétés et anneaux de coordonnées donne alors une application  $\Phi^*$  via

$$\begin{aligned} \Phi^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] &\rightarrow \mathbb{C}[V] \\ P &\mapsto P \circ \Phi. \end{aligned}$$

On note  $Y = \overline{\text{Im}(\Phi)}$  la fermeture de Zariski de l'image de  $\Phi$ .

LEMME I.1.45. L'application  $\Phi^*$  satisfait  $\ker(\Phi^*) = \mathbb{I}(Y)$ .

EXERCICE I.1.46. Prouver ce lemme.

Certains ouverts de Zariski sont eux mêmes des variétés affines, et jouent un rôle particulier dans la définition des variétés abstraites. Soit  $f \in \mathbb{C}[V] \setminus \{0\}$ . On pose

$$V_f = \{p \in V \mid f(p) \neq 0\} \subset V$$

EXERCICE I.1.47. Montrer que  $V_f$  est une variété affine.

On suppose de plus que  $V$  est irréductible, de telle sorte que  $\mathbb{C}[V]$  est intègre et  $\mathbb{C}(V)$ , le corps des fractions de  $\mathbb{C}[V]$ , est bien défini. On pose alors  $\mathbb{C}[V]_f$  la *localisation* de  $\mathbb{C}[V]$  en  $f$  :

$$\mathbb{C}[V]_f := \left\{ \frac{g}{f^m} \in \mathbb{C}(V) \mid g \in \mathbb{C}[V], m \in \mathbb{N} \right\}.$$

PROPOSITION I.1.48. *Sous ces conditions,  $\text{Spec}(\mathbb{C}[V]_f) = V_f$ .*

EXERCICE I.1.49. Montrer la proposition précédente.

**1.6. Variétés affines lisses, singulières, normales.** L'essentiel des variétés que nous rencontreront dans ce cours seront *normales*. Ceci impose en particulier une restriction sur leurs singularités.

DÉFINITION I.1.50. Soit  $R$  un anneau intègre et  $K$  son corps de fraction. L'anneau  $R$  est *normal* si tout élément  $\alpha \in K$  qui est entier sur  $R$  (c'est-à-dire,  $\alpha$  est une racine d'un polynôme unitaire de  $R[x]$ ) vérifie  $\alpha \in R$ .

DÉFINITION I.1.51. Une variété affine irréductible  $V$  est *normale* si son anneau de coordonnées  $\mathbb{C}[V]$  est normal.

EXEMPLE I.1.52. La variété  $\mathbb{C}^n$  est normale, car son anneau de coordonnées  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  est factoriel.

EXEMPLE I.1.53. La variété  $C = \mathbb{V}(x^3 - y^2) \subset \mathbb{C}^2$  est une courbe plane irréductible et non normale (considérer  $(\frac{y}{x})^2 = x$  dans  $\mathbb{C}[C]$ ).

Une variété affine  $V$  admet une *normalisation* définie de la manière suivante. Soit

$$\mathbb{C}[V]' = \{ \alpha \in \mathbb{C}(V) : \alpha \text{ est entier sur } \mathbb{C}[V] \}.$$

On appelle  $\mathbb{C}[V]'$  la *clôture intégrale* de  $\mathbb{C}[V]$ .

PROPOSITION I.1.54. *L'anneau  $\mathbb{C}[V]'$  est normal et est une  $\mathbb{C}$ -algèbre de type finie.*

On obtient ainsi une variété affine normale

$$V' = \text{Spec}(\mathbb{C}[V]').$$

On appelle  $V'$  la *normalisation* de  $V$ . L'inclusion naturelle  $\mathbb{C}[V] \subseteq \mathbb{C}[V]' = \mathbb{C}[V']$  correspond à une application  $V' \rightarrow V$ ; c'est l'application de normalisation.

Pour définir un point lisse d'une variété affine irréductible  $V \subset \mathbb{C}^n$ , on a besoin de la notion d'*anneau local*. Soit  $p \in V$ .

DÉFINITION I.1.55. L'anneau local  $\mathcal{O}_{V,p}$  de  $V$  au point  $p$  est défini par

$$\mathcal{O}_{V,p} := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{C}(V) \mid f, g \in \mathbb{C}[V], g(p) \neq 0 \right\}.$$

On définit également l'idéal  $\mathfrak{m}_{V,p}$  :

$$\mathfrak{m}_{V,p} = \{ \phi \in \mathcal{O}_{V,p} \mid \phi(p) = 0 \}$$

PROPOSITION I.1.56. *L'idéal  $\mathfrak{m}_{V,p}$  est l'unique idéal maximal de  $\mathcal{O}_{V,p}$ . En particulier,  $\mathcal{O}_{V,p}$  est un anneau local.*

On peut alors définir l'*espace tangent de Zariski* de  $V$  au point  $p$  par

$$T_p(V) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{V,p}/\mathfrak{m}_{V,p}^2, \mathbb{C}).$$

EXERCICE I.1.57. Montrer que  $\dim(T_p(\mathbb{C}^n)) = n$  pour tout  $p \in \mathbb{C}^n$ .

Une manière de calculer cet espace tangent est la suivante :

LEMME I.1.58. *On suppose que  $\mathbb{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ . On pose pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$  la différentielle de  $f_i$  en  $p$  :*

$$d_p(f_i) := \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p)x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(p)x_n.$$

Alors

$$T_p(V) = \bigcap_{i=1}^s \ker(d_p(f_i)).$$

En particulier,  $\dim(T_p(V)) \leq n$ .

On rappelle que la dimension de  $V$  (ou  $V$  est irréductible) est le maximum des entiers  $r \in \mathbb{N}$  tels qu'il existe une chaîne de sous-variété de  $V$  de longueur  $r$  :  $\{a\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r = V$  où  $V_i$  est une sous-variété irréductible stricte de  $V_{i+1}$ .

DÉFINITION I.1.59. Le point  $p \in V$  est dit *lisse* ou *non singulier* si  $\dim T_p(V) = \dim(V)$ . Sinon,  $p$  est dit *singulier*. Enfin,  $V$  est lisse si tous ses points sont lisses.

EXEMPLE I.1.60. L'espace  $\mathbb{C}^n$  est lisse. La courbe  $\mathbb{V}(x^3 - y^2)$  a pour unique point singulier le point  $(0, 0)$ .

On termine par la proposition (non triviale) suivante :

PROPOSITION I.1.61. *Une variété affine irréductible et lisse est normale.*

REMARQUE I.1.62. La réciproque n'est pas vraie :  $\mathbb{V}(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$  est normale mais singulière à l'origine.

## 2. Variétés abstraites

On rappelle dans cette section des résultats et définitions sur les variétés abstraites, obtenues par recollement de variétés affines.

**2.1. Fonctions régulières sur les variétés affines.** Soit  $V = \text{Spec}(R)$  une variété affine où  $R$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre commutative de type fini sans nilpotent. On étend les notations de la section précédente à ce cadre plus abstrait. En particulier, on pose, pour  $f \in R$ ,  $\mathbb{V}(f) = \{p \in \text{Spec}(R) \mid f \in p\}$ . On définit également l'ouvert de Zariski  $V_f = V \setminus \mathbb{V}(f)$ . On a  $V_f = \text{Spec}(R_f)$  où  $R_f$  est le localisé de  $R$  en  $f$ .

REMARQUE I.2.1. À l'aide d'un isomorphisme  $R \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ , on voit que la condition  $f \in p$  est équivalente à  $\tilde{f}(\tilde{p}) = 0$ , où  $\tilde{f}$  est un représentant de  $f$  dans  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  et  $\tilde{p}$  est le point de  $V$  correspondance à  $p$ . Dans la suite, on fera systématiquement cette identification.

L'anneau  $\mathbb{C}[V] = R$  est formé de toutes les applications régulières sur  $V$ . Pour définir les variétés abstraites, on va localiser la notion d'application régulière. On rappelle que les ouverts  $V_f$  forment une base de la topologie Zariski sur  $V$ .

DÉFINITION I.2.2. Soit  $U \subset V$  un ouvert de Zariski. On dit que la fonction  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  est régulière si pour tout  $p \in U$ , il existe  $f_p \in R$  telle que  $p \in V_{f_p} \subset U$  et  $\phi|_{V_{f_p}} \in R_{f_p}$ . On définit

$$\mathcal{O}_V(U) = \{\phi : U \rightarrow \mathbb{C} : \phi \text{ est régulière}\}.$$

On rappelle que la condition  $p \in V_{f_p}$  implique que  $f_p(p) \neq 0$  et que  $\phi|_{V_{f_p}} \in R_{f_p}$  implique  $\phi = \frac{a_p}{f_p^{n_p}}$  pour  $a_p \in R$  et  $n_p \in \mathbb{N}$ . Une application régulière est donc localement définie par une fraction de fonctions polynomiales sur  $V$ . Ceci généralise bien la notion d'application polynomiale :

PROPOSITION I.2.3. *Soit  $V = \text{Spec}(R)$  une variété affine. Alors*

(1)  $\mathcal{O}_V(V) = R$ .

(2) Si  $f \in R$ ,  $\mathcal{O}_V(V_f) = R_f$ .

DÉMONSTRATION. Preuve de (1) : Tout élément de  $R$  définit une fonction régulière sur  $V$ . Donc  $R \subset \mathcal{O}_V(V)$ . Soit  $\phi \in \mathcal{O}_V(V)$ . Pour tout  $p \in V$ , il existe  $f_p, a_p \in R$  tel que  $p \in V_{f_p}$  et  $\phi = \frac{a_p}{f_p^{n_p}}$  sur  $V_{f_p}$ .

Soit  $I = \langle f_p^{n_p} : p \in V \rangle$ . On a  $\mathbb{V}(I) = \emptyset$  car  $f_p(p) \neq 0$  pour tout  $p \in V$ . Ainsi, par le Nullstellensatz  $\sqrt{I} = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = R$ . Donc il existe  $S \subset V$  fini et des polynômes  $g_p$  pour  $p \in S$  tel que

$$1 = \sum_{p \in S} g_p f_p^{n_p} .$$

Donc

$$\phi = \sum_{p \in S} g_p f_p^{n_p} \phi = \sum_{p \in S} g_p a_p \in R .$$

On obtient ainsi le premier point.

Preuve de (2) : Soit  $U \subset V_f$  un ouvert de Zariski. L'ouvert  $U$  est aussi de Zariski dans  $V$  et pour tout  $g \in R$  tel que  $V_g \subset U$ , on a  $V_g = V_{fg}$  qui a pour anneau de coordonnées

$$R_{fg} = (R_f)_{g/f^l}$$

pour tout entier  $l \in \mathbb{N}$ . Comme  $V_g$  est un ouvert de  $V_f$  et  $V_{fg}$  un ouvert de  $V$ , on déduit  $\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{V_f}(U)$ . En posant  $U = V_f$ , nous avons

$$\mathcal{O}_V(V_f) = \mathcal{O}_{V_f}(V_f) = R_f$$

où la dernière égalité découle en appliquant le premier point.  $\square$

Quand  $V = \text{Spec}(R)$  est une variété irréductible, on peut décrire les fonctions régulières avec les anneaux locaux :

$$\mathcal{O}_{V,p} = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{C}(V) : f, g \in \mathbb{C}[V] \text{ et } g(p) \neq 0 \right\}$$

définis pour tout point  $p \in \text{Spec}(R)$ . Une fonction rationnelle de  $\mathbb{C}(V)$  se trouve dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{V,p}$  si elle est régulière dans un voisinage de  $p$ . Donc pour tout ouvert  $U$  de  $V$ , on a

$$(1) \quad \mathcal{O}_V(U) = \bigcap_{p \in U} \mathcal{O}_{V,p} .$$

Ainsi les fonction régulières de  $U$  sont les fonctions rationnelles de  $\mathbb{C}(V)$  qui sont définies partout sur  $U$ . Si  $U = V$ , la Proposition I.2.3 implique

$$\bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_{V,p} = \mathcal{O}_V(V) = R = \mathbb{C}[V] .$$

**2.2. Variétés affines vues comme espaces annelés.** Soit  $V$  une variété affine. L'application qui à un ouvert de Zariski  $U$  associe  $\mathcal{O}_V(U)$  possède les propriétés suivantes :

- Quand  $U' \subset U$ , la Définition I.2.2 montre qu'il existe une application de restriction

$$\rho_{U,U'} : \mathcal{O}_V(U) \rightarrow \mathcal{O}_V(U')$$

telle que

- (i)  $\rho_{U,U'}(\phi) = \phi|_{U'}$  et  $\rho_{U,U} = \text{id}$  ;
- (ii)  $\rho_{U',U''} \circ \rho_{U,U'} = \rho_{U,U''}$  lorsque  $U'' \subset U' \subset U$ .
- Soit  $\{U_\alpha\}$  un recouvrement ouvert de  $U \subset V$ . La suite de morphismes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(U) \longrightarrow \prod_{\alpha} \mathcal{O}_V(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathcal{O}_V(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow 0$$

est exacte. La seconde flèche est définie par les restrictions  $\rho_{U,U_\alpha}$  et la double flèche par les applications  $\rho_{U_\alpha, U_\alpha \cap U_\beta} - \rho_{U_\beta, U_\alpha \cap U_\beta}$ .

Dans le langage de la théorie des faisceaux, ces propriétés montrent que  $\mathcal{O}_V$  est un faisceau de  $\mathbb{C}$ -algèbres appelé *faisceau structural* de  $V$ . Le couple  $(V, \mathcal{O}_V)$  est appelé *espace annelé* sur  $\mathbb{C}$ . Comme  $\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{V_f}(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $V_f$ , on écrit  $\mathcal{O}_{V|V_f} = \mathcal{O}_{V_f}$ . En terme d'espace annelé, on a  $(V_f, \mathcal{O}_{V|V_f}) = (V_f, \mathcal{O}_{V_f})$ .

Une application régulière  $\Phi : V_1 \rightarrow V_2$  entre deux variétés affines correspond à l'homomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres

$$\begin{aligned} \Phi^* : \mathbb{C}[V_2] &\rightarrow \mathbb{C}[V_1] \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \Phi. \end{aligned}$$

**DÉFINITION I.2.4.** Soit  $U_i \subset V_i$  un ouvert de Zariski de la variété affine  $V_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Une application  $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$  est un *morphisme* si l'application  $\varphi \mapsto \varphi \circ \Phi$  définit un morphisme d'algèbres

$$\Phi^* : \mathcal{O}_{V_2}(U_2) \rightarrow \mathcal{O}_{V_1}(U_1).$$

On dit que le morphisme  $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$  est un *isomorphisme* si  $\Phi$  est bijective et sa fonction inverse  $\Phi^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$  est aussi un morphisme.

**2.3. Variétés abstraites : recollement de variétés affines.** Avant de définir une variété abstraite, on commence par montrer comment l'espace projectif  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  peut être construit à l'aide de recollements de variétés affines.

**EXEMPLE I.2.5.** L'espace projectif

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

(où l'action de  $\mathbb{C}^*$  est celle des homothéties) est recouvert par des ouverts affines

$$U_i = \text{Spec} \left( \mathbb{C} \left[ \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] \right)$$

pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Pour  $i \neq j$ , on a  $(U_i)_{x_j/x_i} \subset U_i$ ,  $(U_j)_{x_i/x_j} \subset U_j$  et un isomorphisme

$$g_{ji} : (U_i)_{x_j/x_i} \rightarrow (U_j)_{x_i/x_j}$$

donné au niveau des anneaux de coordonnées par

$$g_{ji}^* : \mathbb{C} \left[ \frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right] \rightarrow \mathbb{C} \left[ \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] .$$

$$\frac{x_k}{x_j} \mapsto \left( \frac{x_k}{x_i} \right) \left( \frac{x_j}{x_i} \right)^{-1} \quad (k \neq j)$$

On recolle donc  $U_i$  et  $U_j$  à travers  $g_{ji}$  en notant que les ouverts  $(U_i)_{x_j/x_i}$  et  $(U_j)_{x_i/x_j}$  donnent le même ouvert  $U_i \cap U_j$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Inversement, on peut partir des ouverts  $U_i \cong \mathbb{C}^n$  et des recollements  $g_{ji}$  donnés ci-dessus. Comme  $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$  et  $g_{ki} = g_{kj} \circ g_{ji}$ , le recollement des ouverts  $U_i$  donne bien une variété complexe, isomorphe à l'espace projectif  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

On passe au cas général. On suppose que l'on possède une collection finie  $\{V_\alpha\}$  de variétés affines et pour chaque paire  $\alpha, \beta$  on a des ouverts  $V_{\beta\alpha} \subset V_\alpha$  et des isomorphismes  $g_{\beta\alpha} : V_{\beta\alpha} \rightarrow V_{\alpha\beta}$  (cf Définition I.2.4) vérifiant les conditions de compatibilité :

$$(1) \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1} \text{ pour tout } \alpha \text{ et } \beta.$$

$$(2) \quad g_{\beta\alpha}(V_{\beta\alpha} \cap V_{\gamma\alpha}) = V_{\alpha\beta} \cap V_{\gamma\beta} \text{ et } g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta} \circ g_{\beta\alpha} \text{ sur } V_{\beta\alpha} \cap V_{\gamma\alpha} \text{ pour tout } \alpha, \beta \text{ et } \gamma.$$

Soit  $Y$  la réunion disjointe des ouverts  $V_\alpha$ . On définit la relation  $\sim$  sur  $Y$  par

$$a \sim b \Leftrightarrow a \in V_\alpha, b \in V_\beta \text{ pour un certain } \alpha, \beta \text{ avec } b = g_{\beta\alpha}(a).$$

Les conditions (1) et (2) ci-dessus montrent que  $\sim$  est une relation d'équivalence. On peut former l'espace quotient  $X = Y / \sim$  avec la topologie quotient. Pour chaque  $\alpha$ , on pose

$$U_\alpha = \{[a] \in X : a \in V_\alpha\} .$$

Donc  $U_\alpha \subset X$  est un ouvert et l'application

$$h_\alpha : \begin{array}{ccc} V_\alpha & \rightarrow & U_\alpha \\ a & \mapsto & [a] \end{array}$$

définit un homéomorphisme. Ainsi, localement,  $X$  est isomorphe à une variété affine.

**DÉFINITION I.2.6.** On appelle  $X$  *variété abstraite* définie à partir de la collection des variétés affines  $\{V_\alpha\}$ .

Une variété abstraite vient équipée avec la topologie de Zariski pour laquelle les ouverts sont des ensembles dont la restriction à chaque  $U_\alpha$  est un ouvert. Les fermés de Zariski sont appelés *sous-variétés* de  $X$ . On dit que  $X$  est irréductible, si  $X$  n'est pas l'union de deux sous-variétés propres. Si  $X$  est une variété abstraite quelconque, il existe une famille finie de sous-variétés irréductibles  $Y_1, \dots, Y_s$  tel que  $Y_i \not\subseteq Y_j$  pour  $i \neq j$  et

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_s .$$

On dit que les  $Y_i$  sont les *composantes irréductibles* de  $X$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés abstraites obtenues par recollements via des ouverts affines

$$X = \bigcup_{\alpha} U_\alpha \quad \text{et} \quad Y = \bigcup_{\beta} U'_\beta .$$

Un *morphisme*  $\Phi : X \rightarrow Y$  est une application continue (pour la topologie de Zariski) telle que les restrictions

$$\Phi|_{U_\alpha \cap \Phi^{-1}(U'_\beta)} : U_\alpha \cap \Phi^{-1}(U'_\beta) \rightarrow U'_\beta$$

sont des morphismes au sens de la Définition I.2.4.

**2.4. Faisceau structural d'une variété abstraite.** Avec les notations qui précèdent, soit  $U$  un ouvert de  $X$  et  $W_\alpha = h_\alpha^{-1}(U \cap U_\alpha) \subset V_\alpha$ . Une fonction  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  est *régulière* si  $\Phi \circ h_\alpha|_{W_\alpha} : W_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$  est régulière pour tout  $\alpha$ . Les conditions de compatibilités montrent que l'application est bien définie. On peut donc définir

$$\mathcal{O}_X(U) = \{\Phi : U \rightarrow \mathbb{C} : \Phi \text{ est régulière}\}.$$

On obtient ainsi le *faisceau structural*  $\mathcal{O}_X$  de  $X$ . La variété abstraite  $X$  est donc un espace annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  avec un recouvrement  $\{U_\alpha\}_\alpha$  tel que  $(U_\alpha, (\mathcal{O}_X)|_{U_\alpha})$  est isomorphe à l'espace annelé  $(V_\alpha, \mathcal{O}_{V_\alpha})$  de la variété affine  $V_\alpha$ . On retrouve la définition classique de variété en géométrie algébrique : un espace annelé localement isomorphe à l'espace annelé d'une variété affine. En pratique, dans ce cours, nos variétés seront construites à l'aide de la procédure de recollement de la section précédente.

**2.5. Sous variétés ouvertes et fermés.** Soit  $X$  une variété abstraite et  $U \subset X$  un ouvert. Pour un ouvert affine  $U_\alpha$  de  $X$ ,  $U \cap U_\alpha$  est un ouvert de  $U_\alpha$ . Donc

$$U \cap U_\alpha = \bigcup_{f \in S} (U_\alpha)_f$$

pour un ensemble fini  $S \subset \mathbb{C}[U_\alpha]$ . L'ouvert  $U$  est alors lui-même recouvert par des ouverts affines. Ceci montre que  $U$  est une variété abstraite. Le faisceau structural de  $U$  est  $\mathcal{O}_U := (\mathcal{O}_X)|_U$ .

De même, si  $Y$  est un fermé de  $X$ , alors  $Y$  est une variété abstraite. On note  $i : Y \rightarrow X$  le morphisme d'inclusion associé. Soit  $i_*\mathcal{O}_Y$  le faisceau sur  $X$  défini par

$$i_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(U \cap Y).$$

On obtient par restriction à  $Y$  un morphisme de faisceaux  $\mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$  (c'est à dire la donnée d'un morphisme  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y(U)$  pour chaque ouvert  $U$  vérifiant les compatibilités de restrictions) qui a pour noyau le faisceau  $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$  défini par

$$\mathcal{I}_Y(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) : f(p) = 0 \text{ pour tout } p \in Y \cap U\}.$$

On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0,$$

où l'on rappelle qu'un morphisme de faisceau  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est injectif si  $\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  l'est pour tout ouvert  $U$  tandis que  $\phi$  est surjectif si les germes  $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  sont surjectifs pour tout les points  $x$ .

REMARQUE I.2.7. A partir de maintenant, les variétés abstraites seront simplement appelées *variétés*.

**2.6. Anneaux locaux, fonctions rationnelles, régularité.** Soit  $p$  un point d'une variété affine  $V$ . Les éléments de l'anneau local  $\mathcal{O}_{V,p}$  sont les quotients  $f/g$  avec  $f, g \in \mathbb{C}[V]$  et  $g(p) \neq 0$ . Comme  $p \in V_g$ ,  $V_g$  est un voisinage de  $p$  dans  $V$  et  $f/g$  est une fonction régulière sur  $V_g$ . On peut donc voir les éléments de  $\mathcal{O}_{V,p}$  comme des fonctions régulières définies sur un voisinage de  $p$ .

On peut étendre cette idée dans le cas des variétés. Soit  $p$  un point de  $X$  et  $U_1, U_2$  des voisinages de  $p$ . Les fonctions régulières  $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  et  $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$  sont équivalentes au point  $p$ , que l'on écrit  $f_1 \sim_p f_2$ , s'il existe un voisinage  $U$  de  $p$  tel que  $p \in U \subset U_1 \cap U_2$  et  $f_1|_{U_1} = f_2|_{U_2}$ .

DÉFINITION I.2.8. Soit  $p$  un point d'une variété  $X$ . Alors

$$\mathcal{O}_{X,p} = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ régulière} : U \text{ voisinage de } p\} / \sim_p$$

est l'anneau local de  $X$  en  $p$ .

Chaque élément  $\phi \in \mathcal{O}_{X,p}$  possède une valeur bien définie  $\phi(p)$ . L'idéal

$$\mathfrak{m}_{X,p} = \{\phi \in \mathcal{O}_{X,p} : \phi(p) = 0\}$$

est l'unique idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X,p}$  qui est donc un anneau local.

Quand  $X$  est irréductible, on peut ainsi définir le corps des fonctions rationnelles  $\mathbb{C}(X)$ . Une fonction rationnelle sur  $X$  est une fonction régulière  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un ouvert de Zariski  $U$  non vide. Deux fonctions régulières  $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  et  $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$  de  $X$  sont équivalentes si elles sont égales sur un ouvert  $U \subset U_1 \cap U_2$  non vide. La classe des fonctions rationnelles de  $X$  est appelée *corps des fonctions rationnelle de  $X$* , noté  $\mathbb{C}(X)$ .

Enfin, on peut donner les notions de normalité et de régularité pour les variétés :

DÉFINITION I.2.9. Une variété  $X$  est *normale* si elle est irréductible et les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X,p}$  sont normaux pour tout  $p \in X$ .

PROPOSITION I.2.10. *Soit  $V$  une variété affine irréductible. Alors,  $\mathbb{C}[V]$  est normal si et seulement si les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{V,p}$  sont normaux pour tout  $p \in X$ .*

La Définition I.2.9 et la Proposition I.2.10 donnent :

PROPOSITION I.2.11. *Soit  $X$  une variété irréductible avec un recouvrement par des ouvert affines  $V_\alpha$ . Alors  $X$  est normal si et seulement si  $V_\alpha$  est normale pour tout  $\alpha$ .*

Soit  $p \in X$  un point. On note  $\dim_p X$  le maximum des dimensions des composantes irréductibles de  $X$  contenant  $p$ .

DÉFINITION I.2.12. Soit  $X$  une variété. Un point  $p$  de  $X$  est *lisse* si  $\dim T_p X = \dim_p X$ . La variété  $X$  est lisse si chaque point de  $X$  est lisse.

On encourage bien entendu le lecteur à s'exercer en démontrant les faits énoncés sans preuve.

**Fin du premier cours**



## Tores complexes

Le tore complexe  $(\mathbb{C}^*)^n$  est l'exemple le plus simple de variété torique. Dans ce chapitre, on va faire une étude détaillée des tores complexes. On introduira au passage des notions utiles dans tout le cours.

### 1. Le tore complexe

Le *tore complexe* est le complémentaire de la réunion des diviseurs suivants dans  $\mathbb{C}^n$  :

$$D_i := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, z_i = 0\},$$

c'est à dire

$$(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

On en déduit que le tore complexe est une variété affine.

EXERCICE II.1.1. Montrer que le tore complexe est la variété affine associée à l'idéal premier  $(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot y - 1)$  dans  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y]$ . Montrer, de manière équivalente, que l'anneau des fonctions régulières  $\mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n]$  de  $(\mathbb{C}^*)^n$  est isomorphe à

$$\mathbb{C}[x_i]_{(x_1 \dots x_n)} \simeq \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}],$$

la localisation de  $\mathbb{C}[x_i]$  en  $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ , appelé anneau des polynômes de Laurent.

Le tore complexe est également un groupe, via la multiplication coordonnée par coordonnée. Les deux structures sont en fait compatibles, et  $(\mathbb{C}^*)^n$  est un *groupe algébrique*. Ceci signifie que les morphismes induits par multiplication et inversion :

$$\begin{aligned} m : (\mathbb{C}^*)^n \times (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \\ (\lambda, \mu) &\mapsto \lambda \cdot \mu := (\lambda_i \mu_i) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i : (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \\ \lambda &\mapsto \lambda^{-1} := (\lambda_i^{-1}) \end{aligned}$$

sont des morphismes de variétés affines.

EXERCICE II.1.2. Montrer que  $m$  et  $i$  sont des morphismes de variétés. Quel est le morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbre induit par  $m$  de  $\mathbb{C}[z_i^{\pm 1}]$  vers  $\mathbb{C}[x_i^{\pm 1}] \otimes \mathbb{C}[y_i^{\pm 1}]$  ?

La multiplication  $m$  peut aussi être vue comme une action du tore complexe sur lui même  $(\mathbb{C}^*)^n \curvearrowright (\mathbb{C}^*)^n$ . Cette action induit une structure de  $(\mathbb{C}^*)^n$ -module (à droite) sur  $\mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n]$  via :

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}[x_i^{\pm 1}] &\rightarrow \mathbb{C}[x_i^{\pm 1}] \\ (\lambda, f(x_i)) &\mapsto f(\lambda_i^{-1} x_i). \end{aligned}$$

On remarque que pour tout  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ , l'action du tore prend une forme simple sur le monome  $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  :

$$(\lambda, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}) \mapsto \chi^{-m}(\lambda) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n},$$

où l'on a introduit le *caractère*

$$\chi^m(\lambda) := \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_n^{m_n}.$$

Comme le tore complexe est abélien, l'action de tous ses éléments peut être simultanément diagonalisée, ce qui donne la *décomposition selon les poids* :

$$\mathbb{C}[x_i^{\pm 1}] = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{C}[x_i^{\pm 1}]_m,$$

où l'on pose pour tout  $m \in \mathbb{Z}^n$  l'espace propre associé au caractère  $\chi^m$  :

$$\mathbb{C}[x_i^{\pm 1}]_m := \{f \in \mathbb{C}[x_i^{\pm 1}] \mid \forall \lambda, \lambda \cdot f = \chi^m(\lambda) f\} = \mathbb{C} \cdot x_1^{-m_1} x_2^{-m_2} \dots x_n^{-m_n}.$$

Explicitement, cela donne :

$$\mathbb{C}[x_i^{\pm 1}] = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{C} \cdot x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n},$$

où l'on utilise la notation  $\mathbb{C} \cdot x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  pour définir l'espace vectoriel complexe de dimension 1 engendré par  $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

REMARQUE II.1.3. Le fait que l'action sur l'algèbre des fonctions soit une action à droite et soit donnée par  $\lambda \cdot f = f(\lambda^{-1} \cdot)$  impose le signe  $\mathbb{C}[x_i^{\pm 1}]_m = \mathbb{C} \cdot x_1^{-m_1} x_2^{-m_2} \dots x_n^{-m_n}$ . On a simplement défini l'action du tore de telle sorte que pour  $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^n$ ,  $(\lambda \cdot f)(\lambda \cdot x) = f(x)$ . Ce choix est standard et utile une fois que l'on considère la construction des variétés toriques comme quotients de  $\mathbb{C}^N$ . Ceci sera expliqué, si le temps le permet, dans le dernier chapitre du cours.

Un aspect intéressant de la théorie apparaît ici : l'espace des poids dans cette décomposition est un *semi-groupe* (en fait ici c'est un groupe, mais plus tard on aura affaire à des semi-groupes). Comme les espaces-propres sont tous de dimension 1, ils sont en correspondance avec le semi-groupe des caractères  $\mathbb{Z}^n$ . De plus, l'addition de deux caractères correspond à la multiplication des générateurs unitaires des espaces propres correspondants, on peut donc retrouver toute l'algèbre  $\mathbb{C}[x_i^{\pm 1}]$  à partir de  $\mathbb{Z}^n$ . L'algèbre  $\mathbb{C}[x_i^{\pm 1}]$  est appelée  *$\mathbb{C}$ -algèbre engendrée par le semi-groupe  $\mathbb{Z}^n$* . On commence à voir une description combinatoire simple du tore complexe, en partant de l'objet géométrique  $(\mathbb{C}^*)^n$  nous avons obtenu une  $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini, qui à son tour est entièrement décrite par un semi-groupe  $\mathbb{Z}^n$ . Ce procédé sera généralisé simplement pour produire des variétés toriques affines à partir de semi-groupes, en remplaçant  $\mathbb{Z}^n$  par un sous-semi-groupe satisfaisant des conditions assurant que la  $\mathbb{C}$ -algèbre qu'il engendre est bien celle d'une variété affine.

## 2. Tores abstraits

Dans cette section on revoit de manière intrinsèque la notion de tore complexe.

DÉFINITION II.2.1. Un tore  $T$  est une variété affine isomorphe à  $(\mathbb{C}^*)^n$ . Une tel tore hérite alors de la structure de groupe venant de  $(\mathbb{C}^*)^n$ .

Dans la suite, nous aurons besoin de la proposition suivante. Elle stipule que les sous-groupes algébriques des tores sont des tores, et que l'image d'un morphisme de groupes algébriques entre deux tores est un tore.

PROPOSITION II.2.2. Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux tores. Alors :

- (1) Si  $\Phi : T_1 \rightarrow T_2$  est un morphisme de groupe, l'image de  $\Phi$  est un tore (en particulier une variété affine) et est fermée dans  $T_2$ .
- (2) Soit  $H \subseteq T_1$  une sous-variété irréductible de  $T_1$  qui est également un sous groupe de  $T_1$ . Alors  $H$  est un tore.

On admettra sa démonstration qui repose sur la connaissance des caractères :

DÉFINITION II.2.3. Un caractère d'un tore  $T$  est un morphisme de groupe  $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

EXEMPLE II.2.4. Soit  $m = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ . L'application

$$\chi^m : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^n & \rightarrow & \mathbb{C}^* \\ (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} \end{array}$$

est un caractère de  $(\mathbb{C}^*)^n$ . Tous les caractères de  $(\mathbb{C}^*)^n$  sont de cette forme. Ceci montre que le groupe des caractères de  $(\mathbb{C}^*)^n$  est un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$ .

Pour un tore  $T$  arbitraire, les caractères de  $T$  forment un groupe abélien libre  $M$ , ou réseau, de rang égal à la dimension de  $T$ . À un point  $m \in M$ , on associe le caractère  $\chi^m : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

DÉFINITION II.2.5. Un sous-groupe à un paramètre d'un tore  $T$  est un morphisme de groupe  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow T$ .

EXEMPLE II.2.6. L'élément  $u = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$  donne le sous-groupe à un paramètre

$$\lambda^u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \rightarrow & (\mathbb{C}^*)^n \\ t & \mapsto & (t^{b_1}, \dots, t^{b_n}). \end{array}$$

Le groupe des sous-groupes à un paramètre de  $(\mathbb{C}^*)^n$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$ .

Pour un tore  $T$  arbitraire, les sous-groupes à un paramètre forment un réseau  $N$  de rang égal à la dimension de  $T$ . Comme pour les caractères, à un point  $u \in N$ , on associe le sous-groupe à un-paramètre  $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow T$ .

Il existe un *appariement* entre les réseaux  $M$  et  $N$ , c'est à dire une application bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  définie de la manière suivante : soit  $\chi^m$  un caractère de  $T$  et  $\lambda^u$  un sous-groupe à un-paramètre de  $T$ . La composition  $\chi^m \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  est un caractère de  $\mathbb{C}^*$  qui est donné par  $t \mapsto t^l$  pour un certain  $l \in \mathbb{Z}$ . On définit  $l = \langle m, u \rangle$ .

EXERCICE II.2.7. Si  $T = (\mathbb{C}^*)^n$ ,  $m = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  et  $u = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$  on a

$$\langle m, u \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i .$$

On déduit que les caractères et les sous-groupes à un paramètres d'un tore  $T$  forment des réseaux  $M$  et  $N$  de rang égaux à la dimension de  $T$ , avec un appariement  $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  qui identifie  $N$  avec  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$  et  $M$  avec  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ . Les applications

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* & \rightarrow & T \\ u \otimes t & \mapsto & \lambda^u(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} T & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) \\ x & \mapsto & \{m \mapsto \chi^m(x)\} \end{array}$$

sont injectives. Comme  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ , on en déduit qu'il existe un isomorphisme  $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq T$ . Il est alors d'usage d'écrire le tore  $T$  par  $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  où  $N$  est le groupe des sous-groupes à un paramètre de  $T$ . Avec ce nouveau point de vue, le choix d'un isomorphisme

entre  $T_N$  et  $(\mathbb{C}^*)^n$  induit des isomorphismes  $M \simeq \mathbb{Z}^n$  et  $N \simeq \mathbb{Z}^n$  tels que  $M$  et  $N$  sont deux espaces duaux pour l'appariement  $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Enfin, on terminera ce chapitre par un lemme utile sur les représentations du tore complexe. Sa preuve repose sur le fait que si  $T$  agit sur un espace vectoriel  $W$ , alors les  $w \in W \mapsto t \cdot w$ , sont simultanément diagonalisables (pour  $t \in T$ ) car  $T$  est abélien.

LEMME II.2.8. *Soit  $T_N \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  une représentation linéaire complexe de dimension finie d'un tore  $T_N$ . Pour tout caractère  $m \in M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$  de  $T_N$ , on pose*

$$W_m := \{w \in W \mid \forall t \in T_N, t \cdot w = \chi^m(t)w\}$$

*l'espace propre du poids  $m$ .*

*Alors*

$$W = \bigoplus_{m \in M} W_m.$$

Dans les notations du lemme ci-dessus, l'espace  $W_m$  est constitué de vecteurs propres simultanés pour tout les  $t \in T_N$ , associés aux valeurs propres  $\chi^m(t)$ , d'où la terminologie.

## Variétés toriques affines

Dans ce chapitre, on étudie les variétés toriques affines (ou variétés affines toriques). On commencera par des constructions explicites de telles variétés. Ces constructions utiliseront des plongements explicites, des idéaux ou des anneaux de fonctions régulières. Dans une seconde section, on verra comment construire des variétés toriques affines à l'aide de cones. Enfin, dans la dernière section, on étudiera les propriétés élémentaires de ces variétés.

### 1. Construction de variétés affines toriques

Dans cette partie nous donnons trois types de construction de variétés affines toriques. A l'aide des caractères, nous construisons une variété affine torique via un plongement. Ensuite, nous donnons une construction via les idéaux de polynômes. La dernière construction se fait à partir de l'algèbre des polynômes. Nous terminons cette partie en montrant l'équivalence des trois constructions.

**DÉFINITION III.1.1.** Une *variété affine torique* est une variété affine irréductible  $V$  contenant un tore  $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$  comme sous-ensemble ouvert de Zariski et tel que l'action de  $T_N$  sur lui-même se prolonge en une action algébrique de  $T_N$  sur  $V$ .

Par action algébrique, on entend une action  $T_N \times V \rightarrow V$  donnée par un morphisme.

**EXEMPLE III.1.2.** La variété affine  $V = \mathbb{V}(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$  est torique et a pour tore

$$V \cap (\mathbb{C}^*)^4 = \{(t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}) : t_i \in \mathbb{C}^*\} \cong (\mathbb{C}^*)^3,$$

où l'isomorphisme est donné par  $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$ .

**1.1. Construction à partir d'un réseau de point.** Un réseau est un groupe abélien libre de rang fini. Un réseau de rang  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$ . Un tore  $T_N$  admet un réseau des caractères noté  $M$  et un réseau des sous-groupes à un-paramètre noté  $N$ .

Soit un tore  $T_N$  avec son réseau de caractère  $M$ . Soit  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$  et  $\chi^{m_i} : T_N \rightarrow \mathbb{C}$  le caractère associé à  $m_i$ . On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}} : T_N &\rightarrow \mathbb{C}^s \\ t &\mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)). \end{aligned}$$

**DÉFINITION III.1.3.** La variété affine torique  $Y_{\mathcal{A}}$  est définie comme étant la clôture de Zariski de l'image de  $\Phi_{\mathcal{A}}$ .

**PROPOSITION III.1.4.** Soit  $\mathcal{A} \subset M$  un ensemble fini et  $\mathbb{Z}\mathcal{A} \subseteq M$  le réseau engendré par  $\mathcal{A}$ . Alors  $Y_{\mathcal{A}}$  est une variété affine torique dont le tore a pour réseau de caractère  $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ . En particulier la dimension de  $Y_{\mathcal{A}}$  est le rang de  $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ .

**DÉMONSTRATION.** L'application  $\Phi_{\mathcal{A}}$  peut être vue comme une application entre deux tores  $\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \rightarrow (\mathbb{C}^*)^s$ . Par la Proposition II.2.2 du Chapitre II, l'image  $T = \Phi_{\mathcal{A}}(T_N)$  est un

tore qui est fermé dans  $(\mathbb{C}^*)^s$ . Ceci implique que  $Y_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s = T$  puisque  $Y_{\mathcal{A}}$  est la clôture de Zariski de  $T$ ; donc  $T$  est ouvert dans  $Y_{\mathcal{A}}$ .

Comme  $T$  est irréductible, sa clôture de Zariski  $Y_{\mathcal{A}}$  l'est aussi.

On considère maintenant l'action de  $T$ . Comme  $T \subset (\mathbb{C}^*)^s$ , un élément  $t \in T$  agit sur  $\mathbb{C}^s$  en envoyant une variété sur une variété (ceci car l'action  $T \times \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}^s$  est un morphisme). Pour tout  $t \in T$ , nous avons  $T = t \cdot T \subseteq t \cdot Y_{\mathcal{A}}$ . Ceci montre que  $Y_{\mathcal{A}} \subseteq t \cdot Y_{\mathcal{A}}$ ; en remplaçant  $t$  par  $t^{-1}$ , nous obtenons  $t \cdot Y_{\mathcal{A}} = Y_{\mathcal{A}}$ . Donc l'action de  $T$  sur  $T$  induit une action de  $T$  sur  $Y_{\mathcal{A}}$ .  $Y_{\mathcal{A}}$  est une variété affine torique.

Il nous reste à calculer le réseau de caractère de  $T$  que l'on note  $M'$ . Comme  $T = \Phi_{\mathcal{A}}(T_N)$ , nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} T_N & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{A}}} & (\mathbb{C}^*)^s \\ & \searrow & \nearrow \\ & T & \end{array}$$

De ce diagramme, nous obtenons le diagramme de réseaux de caractères ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^s & \xrightarrow{\hat{\Phi}_{\mathcal{A}}} & M \\ & \searrow & \nearrow \\ & M' & \end{array}$$

L'application  $\hat{\Phi}_{\mathcal{A}}$  envoie la base standard  $e_1, \dots, e_s$  de  $\mathbb{Z}^s$  sur  $m_1, \dots, m_s$ . Donc l'image de  $\hat{\Phi}_{\mathcal{A}}$  est  $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ . Par ce diagramme nous concluons que  $M' \simeq \mathbb{Z}\mathcal{A}$ . Donc  $\mathbb{Z}\mathcal{A}$  est le réseau de caractère de  $Y_{\mathcal{A}}$ .  $\square$

En termes concrets, si l'on fixe une base de  $M$ , on peut supposer que  $M = \mathbb{Z}^n$ . Les  $s$  vecteurs de  $\mathcal{A}$  peuvent être vus comme les colonnes d'une matrice  $A$  de taille  $n \times s$  à coefficient entiers. Dans ce cas,  $\dim Y_{\mathcal{A}} = \text{rang}(A)$ . On verra que toute variété affine torique est isomorphe à  $Y_{\mathcal{A}}$  pour un certain sous-ensemble fini  $\mathcal{A}$  d'un réseau.

**1.2. Construction à partir d'un idéal torique.** Soit  $Y_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^s = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s])$  une variété affine associée à l'ensemble  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$  comme dans la section précédente. Dans cette partie, on va décrire l'idéal  $\mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}})$ .

Dans la démonstration de la Proposition III.1.4, nous avons vu que l'application  $\hat{\Phi}_{\mathcal{A}} : \mathbb{Z}^s \rightarrow M$  envoie  $e_i$  sur  $m_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$  où  $(e_1, \dots, e_s)$  est la base standard de  $\mathbb{Z}^s$ . On note  $L = \ker \hat{\Phi}_{\mathcal{A}}$ . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathbb{Z}^s \longrightarrow M,$$

où

$$L = \left\{ (l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{Z}^s : \sum_{i=1}^s l_i m_i = 0 \right\}.$$

Pour tout  $l = (l_1, \dots, l_s) \in L$ , on pose  $l_+ = \sum_{l_i > 0} l_i e_i$  et  $l_- = - \sum_{l_i < 0} l_i e_i$ . On remarque que que  $l = l_+ - l_-$ .

LEMME III.1.5. *Le binôme  $x^{l_+} - x^{l_-} = \prod_{l_i > 0} x_i^{l_i} - \prod_{l_i < 0} x_i^{-l_i}$  s'annule sur l'image de  $\Phi_{\mathcal{A}}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $l = (l_1, \dots, l_s) \in L$ . On suppose pour simplifier les notations que

$$l_+ = \sum_{i=1}^r l_i e_i \quad \text{et} \quad l_- = - \sum_{i=r+1}^s l_i e_i.$$

Par définition de  $l$ , nous avons

$$\sum_{i=1}^r l_i m_i = - \sum_{i=r+1}^s l_i m_i.$$

Donc pour tout  $t \in T_N$ , nous avons

$$\prod_{i=1}^r \chi^{m_i}(t)^{l_i} = \prod_{i=r+1}^s \chi^{m_i}(t)^{-l_i} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Phi_{\mathcal{A}}(t)^{l_+} = \Phi_{\mathcal{A}}(t)^{l_-}$$

ce qui termine la démonstration. □

PROPOSITION III.1.6. *L'idéal de la variété affine torique  $Y_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s$  est*

$$\mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \langle x^{l_+} - x^{l_-} \mid l_+ - l_- \in L \rangle = \langle x^{\alpha} - x^{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \quad \text{et} \quad \alpha - \beta \in L \rangle.$$

DÉMONSTRATION. On note

$$I_L = \langle x^{\alpha} - x^{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \quad \text{et} \quad \alpha - \beta \in L \rangle$$

et

$$I = \langle x^{l_+} - x^{l_-} \mid l_+ - l_- \in L \rangle.$$

L'inclusion  $I \subset I_L$  est immédiate. Montrons l'inclusion inverse. Soit  $x^{\alpha} - x^{\beta}$  un générateur de  $I_L$ . On a  $l = \alpha - \beta \in L$ . Si  $\alpha = \sum_{i=1}^s \alpha_i e_i$  et  $\beta = \sum_{i=1}^s \beta_i e_i$ , on pose

$$\alpha' = \sum_{\alpha_i \geq \beta_i} \alpha_i e_i, \quad \beta' = \sum_{\alpha_i \geq \beta_i} \beta_i e_i, \quad \alpha'' = \sum_{\alpha_i < \beta_i} \alpha_i e_i \quad \text{et} \quad \beta'' = \sum_{\alpha_i < \beta_i} \beta_i e_i$$

de tel sorte que  $\alpha = \alpha' + \alpha''$ ,  $\beta = \beta' + \beta''$ ,  $l_+ = (\alpha' - \beta')$  et  $l_- = (\beta'' - \alpha'')$ . Nous avons

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = x^{\beta'} x^{\alpha''} (x^{\alpha' - \beta'} - x^{\beta'' - \alpha''}) = x^{\beta'} x^{\alpha''} (x^{l_+} - x^{l_-}).$$

Comme  $x^{l_+} - x^{l_-} \in I$ , on déduit que  $x^{\alpha} - x^{\beta} \in I$ . Ainsi nous avons  $I_L \subset I$ , c'est-à-dire  $I_L = I$ .

Par le Lemme III.1.5, on a  $I_L = I \subset \mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}})$ . Montrons que  $\mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$ . On choisit un ordre monomial sur  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$  (c'est à dire une relation d'ordre totale sur les monomes) et un isomorphisme  $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ . On peut donc supposer que  $M = \mathbb{Z}^n$  et que  $\Phi_{\mathcal{A}}$  est l'application

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}} : (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow \mathbb{C}^s \\ t &\mapsto (t^{m_1}, \dots, t^{m_s}) \end{aligned}$$

Si  $I_L \neq \mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}})$ , il existe  $f \in \mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}}) \setminus I_L$  avec un monôme dominant minimal  $x^{\alpha}$  (pour la relation d'ordre fixée) où  $\alpha = (a_1, \dots, a_s)$ . Quitte à multiplier par un scalaire,  $x^{\alpha}$  devient le terme dominant de  $f$ .

Comme  $f(t^{m_1}, \dots, t^{m_s})$  est identiquement nulle en tant que polynôme de  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ ,  $f$  doit contenir un monôme  $x^{\beta} < x^{\alpha}$  où  $\beta = (b_1, \dots, b_s)$  tel que

$$\prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{a_i} = \prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{b_i}.$$

Nous avons  $\sum_{i=1}^s a_i m_i = \sum_{i=1}^s b_i m_i$ , c'est-à-dire  $\alpha - \beta = \sum_{i=1}^s (a_i - b_i) e_i \in L$ . Donc  $x^\alpha - x^\beta \in I_L$ .

Par construction,  $g = f - x^\alpha + x^\beta \in \mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}}) \setminus L$  possède un monôme dominant strictement plus petit que celui de  $f$ . Ceci est une contradiction. Donc  $\mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$ .  $\square$

DÉFINITION III.1.7. Soit  $L \subset \mathbb{Z}^s$  un sous-réseau.

- (1) L'idéal  $I_L = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ et } \alpha - \beta \in L \rangle$  est appelé *idéal réseau*.
- (2) Un idéal réseau premier est appelé *idéal torique*.

EXEMPLE III.1.8. Les idéaux  $\langle x^3 - y^2 \rangle$  et  $\langle xz - yw \rangle$  sont toriques.

PROPOSITION III.1.9. *Un idéal  $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$  est torique si et seulement si  $I$  est premier et engendré par des binômes.*

DÉMONSTRATION. Il est clair qu'un idéal torique est premier et engendré par des binômes. Dans l'autre direction, supposons que  $I$  soit un idéal premier et engendré par des binômes  $x^{\alpha_i} - x^{\beta_i}$ . On remarque que  $\mathbb{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$  est non vide (il contient 1) et est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*)^s$ . De plus, comme  $\mathbb{V}(I)$  est irréductible,  $\mathbb{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$  l'est aussi. Par la Proposition II.2.2 du Chapitre II,  $T := \mathbb{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$  est un tore.

La projection sur la  $i$ -ème coordonnée de  $(\mathbb{C}^*)^s$  donne un caractère de  $T$ , que l'on note  $\chi^{m_i}$  pour un certain  $m_i \in M$ . On voit alors que  $\mathbb{V}(I) = Y_{\mathcal{A}}$  pour  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ , et comme  $I$  est premier, on a par le Nullstellensatz  $I = \mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}})$ . On en déduit que  $I$  est torique par la proposition précédente.  $\square$

EXEMPLE III.1.10. On considère la surface de  $\mathbb{C}^{d+1}$  paramétré par

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^{d+1} \\ (s, t) &\mapsto (s^d, s^{d-1}t, s^{d-2}t^2, \dots, st^{d-1}, t^d) \end{aligned} \quad .$$

On note  $x_0, \dots, x_d$  les coordonnées de  $\mathbb{C}^{d+1}$  et  $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_d]$  l'idéal définie par

$$I = \langle x_i x_{j+1} - x_{i+1} x_j \mid 0 \leq i < j \leq d-1 \rangle \quad .$$

On a  $\Phi(\mathbb{C}^2) = \mathbb{V}(I)$  (remarquez que  $\mathbb{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^{d+1} = \Phi((\mathbb{C}^*)^2)$ ). Donc  $\widehat{C}_d = \Phi(\mathbb{C}^2)$  est une variété affine. Comme  $I$  est engendré par des binômes, l'idéal  $I$  est torique. Donc  $\widehat{C}_d$  est une variété affine torique. La surface  $\widehat{C}_d$  est appelé *cône rationnel normal* de degré  $d$ .

### 1.3. Construction à partir d'un semi-groupe affine.

DÉFINITION III.1.11. Un *semi-groupe* est un ensemble  $S$  muni d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre.

Pour être un *semi-groupe affine*, on exige plus :

DÉFINITION III.1.12. Un semi-groupe  $S$  est un semi-groupe affine si :

- (1) La loi de composition interne de  $S$  est commutative. On la notera additivement.
- (2)  $S$  est engendré par un nombre fini d'éléments : il existe  $\mathcal{A} \subset S$  fini tel que  $\mathbb{N}\mathcal{A} = S$ .
- (3)  $S$  peut être plongé (en tant que semi-groupe) dans un réseau  $M$ .

EXEMPLE III.1.13. Si  $M$  est un réseau et  $\mathcal{A} \subset M$  un sous-ensemble fini, alors  $\mathbb{N}\mathcal{A} \subseteq M$  est un semi-groupe affine. À isomorphisme près, tous les semi-groupes affines de  $M$  sont de cette forme.



Soit  $S \subseteq M$  un semi-groupe affine.

DÉFINITION III.1.14. L'algèbre de semi-groupe  $\mathbb{C}[S]$  est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel possédant  $S$  pour base et une multiplication induite par la structure de semi-groupe de  $S$ .

Si l'on voit  $M$  comme le réseau de caractère d'un tore  $T_N$ , à un élément  $m \in M$ , on associe le caractère  $\chi^m$ . Alors,

$$\mathbb{C}[S] = \left\{ \sum_{m \in S} c_m \chi^m \mid c_m \in \mathbb{C}, c_m \neq 0 \text{ pour un nombre fini de } m \right\}$$

avec la multiplication induite par  $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$ . Si  $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$  où  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ , alors  $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$ .

EXEMPLE III.1.15. Le semi-groupe affine  $\mathbb{N}^n \subset \mathbb{Z}^n$  donne l'anneau de polynôme

$$\mathbb{C}[\mathbb{N}^n] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

où  $x_i = \chi^{e_i}$  et  $e_1, \dots, e_n$  est la base standard de  $\mathbb{Z}^n$ .

EXEMPLE III.1.16. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base d'un réseau  $M$ ,  $M$  est engendré en tant que semi-groupe par  $\mathcal{A} = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ . On posant  $t_i = \chi^{e_i}$ , nous avons

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}].$$

REMARQUE III.1.17. Si  $M$  est le réseau de caractère du tore  $T_N$ , alors  $\mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M]$ .

PROPOSITION III.1.18. Soit  $\mathcal{A} \subset M$  un ensemble fini et  $S = \mathbb{N}\mathcal{A} \subseteq M$  un semi-groupe affine. Alors :

- (1)  $\mathbb{C}[S]$  est un anneau intègre et une  $\mathbb{C}$ -algèbre engendré par un nombre fini d'éléments.
- (2)  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  est une variété affine torique dont le tore a pour réseau de caractère  $\mathbb{Z}S$  et  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S]) = Y_{\mathcal{A}}$ .

DÉMONSTRATION. On suppose que  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ .

Point 1 : On a  $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$ , donc  $\mathbb{C}[S]$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments. L'inclusion  $S \subset M$  implique  $\mathbb{C}[S] \subset \mathbb{C}[M]$ . Comme  $\mathbb{C}[M]$  est un anneau intègre et  $\mathbb{C}[S]$  un sous-anneau, on déduit que  $\mathbb{C}[S]$  est un anneau intègre.

Point 2 : L'application  $\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \rightarrow \mathbb{C}^s$  donne un homomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbre

$$\pi = (\Phi_{\mathcal{A}})^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \rightarrow \mathbb{C}[M]$$

défini par  $\pi(x_i) = \chi^{m_i}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Par le Lemme I.1.45 (Chapitre I), on a  $\mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \ker \pi$ . Comme  $\text{Im } \pi = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$ , l'anneau de coordonnées de  $Y_{\mathcal{A}}$  est

$$\mathbb{C}[Y_{\mathcal{A}}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] / \mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] / \ker \pi \simeq \text{Im } \pi = \mathbb{C}[S] \quad .$$

Donc  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S]) = \text{Spec}(\mathbb{C}[Y_{\mathcal{A}}]) = Y_{\mathcal{A}}$ . Par la Proposition III.1.4, le tore de  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  a pour réseau de caractère  $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}S$ .  $\square$

EXERCICE III.1.19. Soit  $S \subset \mathbb{Z}$  le semi groupe affine engendré par 2 et 3. Montrer que  $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[t^2, t^3]$  et que la variété affine  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  est  $\mathbb{V}(x^3 - y^2)$ .

**1.4. Équivalence des constructions.** Nous commençons cette section par un lemme utile de décomposition des sous-représentations du tore  $T_N$  sur l'algèbre  $\mathbb{C}[M]$ . On rappelle que l'action de  $T_N$  sur  $T_N$  donnée par la multiplication induit une action sur son anneau de coordonnées  $\mathbb{C}[M]$  : pour  $t \in T_N$  et  $f \in \mathbb{C}[M]$ , alors  $t \cdot f \in \mathbb{C}[M]$  est définie par  $p \mapsto f(t^{-1} \cdot p)$  pour tout  $p \in T_N$ .

LEMME III.1.20. *Soit  $A \subseteq \mathbb{C}[M]$  un sous-espace stable sous l'action de  $T_N$ . Alors*

$$A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

DÉMONSTRATION. On pose

$$A' = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

On a bien sûr  $A' \subset A$  et il faut démontrer l'inclusion inverse. Soit  $f \in A \neq \{0\}$ . Comme  $A \subset \mathbb{C}[M]$ , on peut décomposer  $f$  selon les espaces propres de l'action de  $T_N$  :

$$f = \sum_{m \in \mathcal{B}} c_m \chi^m$$

où  $c_m \in \mathbb{C}^*$  et  $\mathcal{B} \subset M$  est fini. On a donc  $f \in B \cap A$ , où l'on a posé

$$B := \text{Span}\{\chi^m \mid m \in \mathcal{B}\} \subset \mathbb{C}[M].$$

Par définition de l'action de  $T_N$ ,  $B$ , et donc  $B \cap A$ , sont stables sous cette action. Or  $B \cap A$  est de dimension finie. On peut donc appliquer le Lemme II.2.8 du chapitre II pour en déduire que  $B \cap A$  est engendré par des vecteurs propres simultanés de  $T_N$ , que l'on peut identifier dans  $\mathbb{C}[M]$  à des caractères du tore. Donc  $B \cap A$  est engendré par des caractères, et on déduit de  $f \in A \cap B$  que pour tout  $m \in \mathcal{B}$ ,  $\chi^m \in A$ . D'où le résultat.  $\square$

Nous sommes désormais en mesure de montrer l'équivalence des constructions de variétés toriques affines vues dans les sections précédentes.

THÉORÈME III.1.21. *Soit  $V$  une variété affine. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $V$  est une variété affine torique.
- (2)  $V = Y_{\mathcal{A}}$  pour un ensemble fini  $\mathcal{A}$  dans un réseau.
- (3)  $V$  est une variété affine définie par un idéal torique.
- (4)  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  pour un semi-groupe affine  $S$ .

DÉMONSTRATION. L'équivalence entre les points (2) et (4) provient de la Proposition III.1.18, car un semi-groupe  $S$  inclus dans un réseau  $M$  est isomorphe à  $\mathbb{N}\mathcal{A}$  pour un ensemble fini  $\mathcal{A}$ .

Montrons (2)  $\Rightarrow$  (3) : comme  $V = Y_{\mathcal{A}}$ , par la Proposition III.1.6,  $\mathbb{I}(Y_{\mathcal{A}})$  est un idéal torique. En utilisant l'égalité  $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ , on déduit que  $V$  provient d'un idéal torique.

Montrons (3)  $\Rightarrow$  (2) : la variété  $V$  est définie par l'idéal torique  $I_L$ . Il existe un sous-ensemble fini  $\mathcal{A} \subset M$  tel que  $L = \ker \hat{\Phi}_{\mathcal{A}}$ . Comme  $Y_{\mathcal{A}} = \mathbb{V}(I_L)$ , on déduit que  $V = Y_{\mathcal{A}}$ .

La Proposition (III.1.18) nous montre l'implication 4  $\Rightarrow$  1. Montrons maintenant la réciproque.

Soit  $V$  une variété affine torique contenant un tore  $T_N$  qui a pour réseau de caractère  $M$ . Comme  $\mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M]$ , l'inclusion  $T_N \subset V$  induit une application

$$\mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[M]$$

qui est injective car  $T_N$  est dense dans  $V$  pour la topologie de Zariski. Comme l'action de  $T_N$  sur  $V$  est donnée par un morphisme  $T_N \times V \rightarrow V$ , si  $t \in T_N$  et  $f \in \mathbb{C}[V]$ , l'application  $p \mapsto f(t^{-1} \cdot p)$  est un morphisme sur  $V$ . Donc  $\mathbb{C}[V]$  est stable par l'action de  $T_N$ . Par le Lemme III.1.20, on a

$$(2) \quad \mathbb{C}[V] = \bigoplus_{\chi^m \in \mathbb{C}[V]} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

Ainsi  $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$  pour le semi-groupe  $S = \{m \in M \mid \chi^m \in \mathbb{C}[V]\}$ .

Comme  $\mathbb{C}[V]$  est engendré par un nombre fini d'éléments, on déduit qu'il existe  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[V]$  tel que  $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_s]$ . En exprimant chaque  $f_i$  en fonction des caractères dans l'équation (2), on trouve un ensemble fini  $\mathcal{A} \subset M$  tel que  $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$ .  $\square$

REMARQUE III.1.22. Le Théorème III.1.21 donne la caractérisation des idéaux et anneaux de coordonnées des variétés toriques affines parmi ceux des variétés affines.

Le point clé de la démonstration du Théorème III.1.21 est le suivant. Si une variété affine irréductible  $V$  contient un tore  $T_N$  comme ouvert de Zariski, alors on a une injection entre algèbres

$$\mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[M].$$

Les fonctions régulières de  $V$  sont donc les fonctions régulières du tore qui s'étendent sur  $V$ . La variété  $V$  est torique si de plus l'action de  $T_N$  s'étend en une action sur  $V$ , ce qui se traduit par le fait que les fonctions de  $\mathbb{C}[M]$  qui s'étendent sur  $V$  sont déterminées par les caractères qui s'étendent sur  $V$ . L'algèbre  $\mathbb{C}[V]$  est alors simplement déterminée par un semi-groupe affine. L'objet de la section suivante est de montrer que les semi-groupes affines sont décrits par des cônes dans l'espace  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Voici en exercice l'étude d'un exemple qui traduit ce fait.

EXERCICE III.1.23. Soit  $V := \mathbb{V}(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$ .

(1) Montrer que l'idéal  $(xy - zw)$  est torique.

*Le polynôme  $xy - zw$  est irréductible (on ne peut pas le décomposer comme produit de polynômes de degré 1, essayez par l'absurde). L'idéal est donc premier. Reste à montrer que c'est un idéal réseau. On considère le réseau de rang un  $L := \mathbb{Z} \cdot (1, 1, -1, -1)$  dans  $\mathbb{Z}^4$ , engendré par  $(1, 1, -1, -1)$ . Il contient les éléments  $(n, n, -n, -n)$ . L'idéal réseau associé à  $L$  est donc l'idéal  $I_L$  engendré par les polynômes  $(x^n y^n) - (z^n w^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On a donc que l'idéal  $(xy - zw)$  est inclus dans  $I_L$  (prendre  $n = 1$ ). Réciproquement, comme  $(x^n y^n) - (z^n w^n) = (xy - zw)(x^{n-1} y^{n-1} + z w x^{n-2} y^{n-2} + \dots + z^{n-1} w^{n-1})$ , on a que  $x^n y^n - z^n w^n$  est dans l'idéal  $(xy - zw)$ , et donc  $(xy - zw) = I_L$  qui est alors un idéal réseau. C'est donc un idéal torique.*

(2) Montrer que le tore de  $V$ , isomorphe à  $(\mathbb{C}^*)^3$ , est obtenu par  $\Phi : (t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$

*L'intersection  $T := (\mathbb{C}^*)^4 \cap V$  est égale à l'image de  $\Phi$  (il faut faire les calculs pour ce fait en général, mais dans cet exemple c'est assez facile, posez  $x = t_1, y = t_2, z = t_3$ , et alors  $w = xy z^{-1} = t_1 t_2 t_3^{-1}$ ). Ce qu'il faut comprendre c'est que cela correspond bien au tore de  $V$  :*

(i)  $T = \text{Im} \Phi$  est un tore par le premier point de la Proposition II.2.2.

(ii)  $T$  agit sur  $V$  via l'action de  $(\mathbb{C}^*)^4$  sur  $V$ .

(iii)  $V$  est la fermeture de Zariski de cet ouvert. En effet, l'adhérence de  $T = V \cap (\mathbb{C}^*)^4$  est  $(V \cap \mathbb{C}^4) = V$  car  $(\mathbb{C}^*)^4$  est Zariski dense dans  $\mathbb{C}^4$  et  $V$  n'a aucune composante irréductible dans  $\{xyzw = 0\}$  (le complémentaire de  $(\mathbb{C}^*)^4$  dans  $\mathbb{C}^4$ ).

En conclusion,  $T$  est un tore qui agit sur  $V$  avec une orbite ouverte. C'est donc bien le tore de la variété torique  $V$  par définition.

- (3) Montrer que les points  $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^3$  utilisés pour définir  $\Phi$  sont donnés par les colonnes de la matrice

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

et que  $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$ , où  $S$  est le semi-groupe engendré par les vecteurs colonnes de  $[\Phi]$ .

Par construction, l'ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{Z}^3$  utilisés pour définir  $\Phi = \Phi_{\mathcal{A}}$  est l'ensemble des poids qui apparaissent dans  $\Phi = (\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_4})$ . On rappelle que par définition  $\chi^m(t_1, t_2, t_3) = t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_3^{m_3}$ . Comme  $\Phi_1 = t_1$ , on a  $m_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\Phi_2 = t_2$ , on a  $m_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\Phi_3 = t_3$ ,  $m_3 = (0, 0, 1)$  et  $\Phi_4 = t_1 t_2 t_3^{-1}$  donne  $m_4 = (1, 1, -1)$ . Le fait que  $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$  est une application directe de la Proposition III.1.18.

- (4) Soit  $C \subset \mathbb{R}^3$  le cône

$$C := \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i m_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

où les  $(m_i)$  sont les vecteurs colonnes de  $[\Phi]$ . Montrer que  $S = C \cap \mathbb{Z}^3$ .

Calcul direct qui utilise la décomposition de tout réel  $x$  comme  $x = E(x) + (x - E(x))$ , avec  $E(x)$  la partie entière de  $x$ .

On terminera par un exercice qui montre que différentes paramétrisations peuvent donner la même variété torique, mais avec des comportements des paramétrisations différents.

EXERCICE III.1.24. Soient  $\Phi_1(s, t) = (s^2, st, st^3)$  et  $\Phi_2(s, t) = (s^3, st, t^3)$  deux paramétrisations de variété toriques affines de  $\mathbb{C}^3$ .

- (1) Montrer que  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  paramétrisent la variété  $\mathbb{V}(xz - y^3) \subset \mathbb{C}^3$  (remarquez que  $\mathbb{V}(xz - y^3) \cap ((\mathbb{C}^*)^3) = \Phi_i((\mathbb{C}^*)^2)$ ).
- (2) On étend  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  en des applications  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{V}(xz - y^3)$ . Montrer que  $\Phi_2$  est surjective, mais que  $\Phi_1$  ne l'est pas.

Fin du deuxième cours (19/01/2021)

## 2. Cônes et variétés affines toriques

On commence cette section en donnant quelques propriétés autour des cônes polyédraux convexe et des cônes polyédraux rationnels. Dans un deuxième temps, on explique comment construire une variété torique affine à partir d'un cône polyédral. Les énoncés autour des cônes polyédraux sont admis, pour plus de détails on renvoie à l'appendice de [Oda].

**2.1. Cônes polyédraux convexes.** Soit  $M_{\mathbb{R}}$  et  $N_{\mathbb{R}}$  une paire duale d'espaces vectoriels fixée.

DÉFINITION III.2.1. Un *cône polyédral convexe* dans  $N_{\mathbb{R}}$  est un ensemble de la forme

$$\sigma = \text{Cone}(S) = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \right\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

où  $S \subset N_{\mathbb{R}}$  est un ensemble fini. On dit que  $\sigma$  est engendré par  $S$ . On définit  $\text{Cone}(\emptyset) = \{0\}$ .

Le cône polyédral convexe  $\sigma$  est un *cône* (c'est-à-dire, si  $x \in \sigma$ , alors  $\lambda x \in \sigma$  pour  $\lambda \geq 0$ ) et est clairement convexe. Comme on étudiera uniquement des cônes convexes, les cônes vérifiant la définition III.2.1 seront simplement appelés *cônes polyédraux*.

La dimension  $\dim(\sigma)$  du cône polyédral  $\sigma$  est la dimension du plus petit sous-espace vectoriel  $W = \text{vect}(\sigma)$  de  $N_{\mathbb{R}}$  contenant  $\sigma$ . On appelle  $\text{vect}(\sigma)$  le sous-espace vectoriel engendré par  $\sigma$ .

EXEMPLE III.2.2. L'ensemble  $\mathbb{R}_+^2 \subset \mathbb{R}^2$  est un cône polyédral. On note  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Dessiner les cônes engendrés par  $S_1 = \{e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\}$  ou bien  $S_2 = \{e_1, e_2, e_3, -e_3\}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Une différence remarquable est que le premier ne contient aucune droite vectorielle, tandis que le second en contient une. On dira que le second cône n'est pas *strictement convexe*. Enfin, on peut avoir des cônes de dimension plus petite que la dimension de l'espace ambiant, par exemple  $\text{Cone}(\{e_1\}) \subset \mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 2$ .

**Cône dual et faces.** On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'application de dualité entre  $M_{\mathbb{R}}$  et  $N_{\mathbb{R}}$ . Cet appariement est utilisé pour définir le dual et les faces d'un cône polyédral.

DÉFINITION III.2.3. Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral. Le *cône dual* de  $\sigma$  est défini par

$$\sigma^\vee = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq 0 \text{ pour tout } u \in \sigma\} .$$

Une proposition cruciale de la théorie est la suivante qui stipule que la dualité préserve le caractère polyédral d'un cône.

PROPOSITION III.2.4. Soit  $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral. Alors  $\sigma^\vee$  est un cône polyédral dans  $M_{\mathbb{R}}$  et  $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ .

Soit  $m \in M_{\mathbb{R}}$ . On définit l'hyperplan (si  $m \neq 0$ )

$$H_m = \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle = 0\}$$

et le demi-espace fermé

$$H_m^+ = \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq 0\}.$$

DÉFINITION III.2.5. Soit  $\sigma$  un cône polyédral. On dit que  $\tau$  est une *face* de  $\sigma$  si  $\tau = H_m \cap \sigma$  pour un certain  $m \in \sigma^\vee$ . La notation  $\tau \leq \sigma$  sera utilisée pour signifier que  $\tau$  est une face de  $\sigma$ . On dit qu'une face  $\tau$  de  $\sigma$  est *propre* si  $\tau \neq \sigma$ . On notera  $\tau < \sigma$  pour signifier que  $\tau$  est une face propre.

Notez que dans la définition précédente on autorise  $m = 0$ , de telle sorte que  $\sigma$  est toujours une face de lui-même (la plus grande ses faces pour la relation d'inclusion).

EXEMPLE III.2.6. Déterminer les faces de  $\mathbb{R}_+^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  (il y en a quatre).

Les faces d'un cône polyédral sont également des cônes polyédraux. En fait, on a :

PROPOSITION III.2.7. *Soit  $\sigma$  un cône polyédral. Alors*

- (1) *Toute face de  $\sigma$  est un cône polyédral.*
- (2) *L'intersection de deux faces de  $\sigma$  est encore une face de  $\sigma$ .*
- (3) *Toute face d'une face de  $\sigma$  est encore une face de  $\sigma$ .*

Un lemme utile est le suivant :

LEMME III.2.8. *Soit  $\tau$  une face d'un cône polyédral  $\sigma$ . Si  $v, w \in \sigma$  et  $v + w \in \tau$  alors  $v, w \in \tau$ . Réciproquement, si  $C \subset \sigma$  est un cône qui satisfait que pour tout  $v, w \in \sigma$ ,  $v + w \in C$  implique  $v, w \in C$ , alors  $C$  est une face de  $\sigma$ .*

DÉMONSTRATION. La preuve est laissée en exercice. Pour la réciproque, on peut supposer que  $C$  intersecte l'intérieur relatif de  $\sigma$  (quitte à se restreindre à une face de  $\sigma$ ).  $\square$

DÉFINITION III.2.9. Soit  $\sigma$  un cône polyédral. Une *facette* de  $\sigma$  est une face de codimension 1 et une *arête* (ou *rayon*) de  $\sigma$  est une face de dimension 1.

Voici des propriétés des facettes.

PROPOSITION III.2.10. *Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral. Alors :*

- (1) *Si  $\sigma = H_{m_1}^+ \cap \dots \cap H_{m_s}^+$  pour  $m_1, \dots, m_s \in \sigma^\vee$ , alors  $\sigma^\vee = \text{Cone}(m_1, \dots, m_s)$ .*
- (2) *Si  $\dim \sigma = n$ , alors en (1), on peut dire que les facettes de  $\sigma$  sont les  $\tau_i = H_{m_i} \cap \sigma$ .*
- (3) *Toute face propre  $\tau$  est l'intersection des facettes de  $\sigma$  contenant  $\tau$ .*

REMARQUE III.2.11. Dans  $\mathbb{R}^n$ , le produit scalaire usuel permet d'identifier  $\mathbb{R}^n$  avec son dual. Les vecteurs  $m_1, \dots, m_s$  du point (1) de la Proposition III.2.10 sont les normales des facettes (c'est-à-dire  $m_i$  est perpendiculaire à  $H_{m_i}$ ). Ceci permet de faire des calculs explicites.

EXERCICE III.2.12. Soit  $\sigma_1 = \text{Cone}(S_1) \subset \mathbb{R}^3$  comme dans l'exemple III.2.2.

- (1) Montrer que les normales aux facettes de  $\sigma_1$  sont donnés par  $\{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ .
- (2) En déduire que

$$\sigma_1^\vee = \text{Cone}(\{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3\}).$$

- (3) Vérifier que  $(\sigma_1^\vee)^\vee = \sigma_1$ .

- (4) Montrez que

$$\mathbb{C}[\sigma_1^\vee \cap \mathbb{Z}^3] \simeq \mathbb{C}[x, y, z, w]/(xy - zw).$$

On retrouve un exemple déjà étudié de variété torique affine...

Plus généralement si  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  est un cône polyédral et  $\tau \leq \sigma$  une face, on définit :

$$\tau^\perp = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in \tau\}$$

et  $\tau^*$  :

$$\tau^* = \{m \in \sigma^\vee : \langle m, u \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in \tau\} = \sigma^\vee \cap \tau^\perp.$$

PROPOSITION III.2.13. *Si  $\tau$  est une face d'un cône polyédral  $\sigma$ , alors :*

- (1)  $\tau^*$  est une face de  $\sigma^\vee$
- (2) L'application  $\tau \mapsto \tau^*$  définie sur l'ensemble des faces de  $\sigma$  vers les faces de  $\sigma^\vee$  est bijective et renverse l'inclusion.
- (3)  $\dim \tau + \dim \tau^* = n$ .

REMARQUE III.2.14. On appelle  $\tau^*$  la *face duale* de  $\tau$ .

EXEMPLE III.2.15. Calculer les faces duales du cône  $\text{Cone}(\{e_1, e_2\}) \subset \mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

L'espace  $\text{vect}(\sigma)$  est le plus petit sous espace vectoriel de  $N_{\mathbb{R}}$  contenant  $\sigma$ . L'*intérieur relatif* de  $\sigma$  que l'on notera  $\text{Relint}(\sigma)$  est l'intérieur de  $\sigma$  dans  $\text{vect}(\sigma)$ . On peut caractériser  $\text{Relint}(\sigma)$  de la façon suivante :

$$u \in \text{Relint}(\sigma) \Leftrightarrow \langle m, u \rangle > 0 \text{ pour tout } m \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp .$$

Si  $\text{vect}(\sigma) = N_{\mathbb{R}}$ , l'intérieur relative de  $\sigma$  est simplement l'intérieur de  $\sigma$  noté  $\text{Int}(\sigma)$ .

EXERCICE III.2.16. Soit  $\tau \leq \sigma$  une face d'un cône polyédral et soit  $m \in \sigma^\vee$ .

- (1) Montrer que  $m \in \tau^* \Leftrightarrow \tau \subset H_m \cap \sigma$ .
- (2) Montrer que  $m \in \text{Relint}(\tau^*) \Leftrightarrow \tau = H_m \cap \sigma$

**Forte convexité.** On dit qu'un cône polyédral est *fortement convexe* si  $\{0\}$  est une face.

PROPOSITION III.2.17. *Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\sigma$  est fortement convexe ;
- (2)  $\{0\}$  est une face de  $\sigma$  ;
- (3)  $\sigma$  ne contient aucun sous-espace de  $N_{\mathbb{R}}$  de dimension positive ;
- (4)  $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$  ;
- (5)  $\dim \sigma^\vee = n$  .

COROLLAIRE III.2.18. *Si  $\sigma$  est un cône polyédral fortement convexe de dimension maximale, alors  $\sigma^\vee$  l'est aussi.*

Voici un exercice pour manipuler les notions vues jusqu'à présent.

EXERCICE III.2.19. Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral.

- (1) Montrer que  $\sigma$  a une unique face minimale par rapport à la relation  $\leq$  (indication : utiliser la Proposition III.2.13). On note  $W$  cette face.
- (2) Montrer que  $W = (\sigma^\vee)^\perp$ .
- (3) Montrer que  $W$  est le plus grand espace vectoriel inclus dans  $\sigma$ .
- (4) Montrer que  $W = \sigma \cap (-\sigma)$ .
- (5) Soit  $m \in \sigma^\vee$ . Montrer que

$$m \in \text{Relint}(\sigma^\vee) \Leftrightarrow W = H_m \cap \sigma.$$

On termine cette section sur la forte convexité par le lemme de séparation. Ce dernier permettra de recoller les variétés toriques affines ensemble pour construire des variétés toriques. Il joue donc un rôle particulier dans la théorie.

LEMME III.2.20 (Lemme de séparation). *Soient  $\sigma_1, \sigma_2 \subset N_{\mathbb{R}}$  des cônes polyédraux qui se rencontrent le long d'une face commune  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ . Alors*

$$\tau = H_m \cap \sigma_1 = H_m \cap \sigma_2$$

*pour tout  $m \in \text{Relint}(\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee)$ .*

DÉMONSTRATION. On part de la relation suivante

$$\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee = (\sigma_1 - \sigma_2)^\vee$$

où

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \{u - v \mid u \in \sigma_1, v \in \sigma_2\}.$$

Soit alors  $m \in \text{Relint}(\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee)$ . On déduit de l'exercice III.2.19 que

$$H_m \cap (\sigma_1 - \sigma_2) = (\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1)$$

car  $(\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1)$  est la face minimale de  $(\sigma_1 - \sigma_2)$ . D'autre part,

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1) = \tau - \tau.$$

En effet, l'inclusion non triviale est  $(\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1) \subset \tau - \tau$ . Soit alors  $u = a_1 - a_2 = b_2 - b_1$ , où  $a_i, b_i \in \sigma_i$ . On a alors  $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \in \tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ . Comme  $\tau$  est une face de  $\sigma_i$ , on en déduit que  $a_i, b_i \in \tau$ . D'où  $u \in \tau - \tau$ . On a donc bien montré

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1) = \tau - \tau,$$

et donc

$$H_m \cap (\sigma_1 - \sigma_2) = \tau - \tau.$$

En intersectant avec  $\sigma_1$  et en utilisant le Lemme III.2.8 de nouveau, on obtient

$$H_m \cap \sigma_1 = (\tau - \tau) \cap \sigma_1 = \tau.$$

En intersectant avec  $-\sigma_2$ , on obtient symétriquement

$$H_m \cap \sigma_2 = \tau,$$

d'où le résultat. □

**Cônes polyédraux rationnels.** On s'intéresse à des variétés algébriques. Il faut donc introduire des cônes rationnels. Soit  $M$  et  $N$  deux réseaux duaux avec  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ,  $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  les espaces vectoriels associés.

DÉFINITION III.2.21. Un cône polyédral  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  est *rationnel* si  $\sigma = \text{Cone}(S)$  pour un certain ensemble fini  $S \subset N$ .

REMARQUE III.2.22. Les faces et le cône dual d'un cône polyédral rationnel sont rationnels. De plus, la rationalité implique que si  $\sigma = \text{Cone}(S)$  où  $S \subset N$  est fini et  $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , alors

$$\sigma \cap N_{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u : \lambda_u \in \mathbb{Q} \text{ et } \lambda_u \geq 0 \right\}.$$

Un cône polyédral rationnel fortement convexe admet un ensemble canonique de générateurs. Soit  $\rho$  une arête de  $\sigma$ . Comme  $\sigma$  est fortement convexe,  $\rho$  est une demi-droite, et comme  $\sigma$  est rationnel le semi-groupe  $\rho \cap N$  admet un unique générateur  $u_\rho \in \rho \cap N$ . L'élément  $u_\rho$  est appelé *générateur du rayon  $\rho$*  ou *générateur minimal* de  $\rho$ . L'ensemble des générateurs minimaux des rayons de  $\sigma$  sera appelé *ensemble des générateurs minimaux* du cône  $\sigma$ , pour la raison suivante :

LEMME III.2.23. *Un cône polyédral rationnel fortement convexe est engendré par les générateurs minimaux de ses rayons.*



De manière équivalente, si  $\sigma$  est un cône polyédral fortement convexe rationnel, son dual  $\sigma^\vee$  l'est aussi. De plus, si la dimension de  $\sigma$  est maximale,  $\sigma^\vee$  est engendré par les générateurs des normales aux facettes de  $\sigma$ .

REMARQUE III.2.24. À partir de maintenant, pour simplifier les notations, on appellera simplement **cône** tout **cône polyédral rationnel fortement convexe**.

La définition suivante distingue deux classes importantes de cônes, qui donneront des variétés lisses ou orbifoldes.

DÉFINITION III.2.25. Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral rationnel fortement convexe.

- (1) Le cône  $\sigma$  est *lisse* ou *régulier* si ses générateurs minimaux peuvent être complétés en une  $\mathbb{Z}$ -base de  $N$ .
- (2) Le cône  $\sigma$  est *simplicial* si ses générateurs minimaux sont linéairement indépendant sur  $\mathbb{R}$ .

REMARQUE III.2.26. Le dual d'un cône lisse (resp. simplicial) de dimension maximal est aussi lisse (resp. simplicial).

EXEMPLE III.2.27. Le cône de l'exemple III.2.15 est lisse, tandis que l'exemple  $\sigma_1$  de l'exercice III.2.12 n'est pas simplicial. Le cône  $\text{Cone}(e_1, e_1 + 2e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  est simplicial mais non lisse (dans le réseau  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ ).

**2.2. Algèbres de semi-groupes et variétés toriques affines.** C'est dans cette section que l'on va faire le lien entre les variétés affines toriques et les cônes. Ce lien repose sur le Lemme de Gordan. Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral rationnel.

PROPOSITION III.2.28 (Lemme de Gordan). *Le réseau de point  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  est un semi-groupe affine.*

DÉMONSTRATION. Comme  $\sigma^\vee$  est polyédral rationnel, il existe  $T \subset M$  fini tel que  $\sigma^\vee = \text{Cone}(T)$ . L'ensemble

$$K = \left\{ \sum_{m \in T} \delta_m m : 0 \leq \delta_m < 1 \right\}$$

est borné dans  $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ . Comme  $M \simeq \mathbb{Z}^n$ , l'ensemble  $K \cap M$  est fini. Donc  $\mathcal{A} = T \cup (K \cap M)$  est fini.

Par construction, nous avons  $\mathcal{A} \subset S_\sigma$ . Comme  $\mathbb{N}\mathcal{A} \subset M$  et  $\mathbb{N}\mathcal{A} \subset \sigma^\vee$ , nous avons  $\mathbb{N}\mathcal{A} \subset S_\sigma$ . Montrons que  $\mathcal{A}$  engendre  $S_\sigma$  en tant que semi-groupe affine. Soit  $w \in S_\sigma$ . Comme  $S_\sigma \subset \sigma^\vee$ , on peut écrire

$$w = \sum_{m \in T} \lambda_m m$$

où  $\lambda_m \geq 0$ . Comme  $\lambda_m = [\lambda_m] + \delta_m$  avec  $[\lambda_m] \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq \delta_m < 1$ , nous avons

$$w = \sum_{m \in T} [\lambda_m] m + \sum_{m \in T} \delta_m m.$$

Comme  $M$  est un réseau et  $w \in M$ , on déduit que

$$\sum_{m \in T} \delta_m m \in M$$

c'est à dire

$$\sum_{m \in T} \delta_m m \in M \cap K.$$

Donc  $S_\sigma \subset \mathbb{N}\mathcal{A}$ . Ainsi, nous avons  $S_\sigma = \mathbb{N}\mathcal{A}$ . C'est donc un semi-groupe affine.  $\square$

On obtient alors directement de ce lemme une construction de variétés toriques à partir de cônes. On verra plus tard que les variétés toriques affines qui proviennent de cônes sont précisément celles qui sont normales.

**THÉORÈME III.2.29.** *Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral rationnel. On pose  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ . Alors*

$$U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$$

*est une variété affine torique. De plus*

$$\dim U_\sigma = n \iff \text{le tore de } U_\sigma \text{ est } T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \iff \sigma \text{ est fortement convexe.}$$

**REMARQUE III.2.30.** Dans la suite on se restreindra aux cônes polyédraux rationnels *fortement convexes* pour s'assurer que le tore de la variété soit bien  $T_N$ .

**REMARQUE III.2.31.** D'après ce théorème il semble qu'il soit plus utile de travailler directement avec  $\sigma^\vee$  plutôt que  $\sigma$ . On verra dans le Chapitre IV que le choix de  $\sigma$  apparaît naturellement dès qu'on s'intéresse au recollement de variétés affines toriques.

**DÉMONSTRATION.** Grâce à la Proposition III.2.28 et au Théorème III.1.21, on déduit que  $U_\sigma$  est une variété affine torique dont le tore a pour réseau de caractères  $\mathbb{Z}S_\sigma \subset M$ . On a par ailleurs

$$\mathbb{Z}S_\sigma = \{m_1 - m_2 : m_1, m_2 \in S_\sigma\}.$$

Soit  $m \in M$  et  $k > 1$  tel que  $km \in \mathbb{Z}S_\sigma$ . Il existe  $m_1, m_2 \in S_\sigma$  tel que  $km = m_1 - m_2$ . Nous avons

$$m = \frac{1}{k}m_1 - \frac{1}{k}m_2 \quad \text{i.e.} \quad m + m_2 = \frac{1}{k}m_1 + \frac{k-1}{k}m_2.$$

Comme  $\sigma^\vee$  est convexe, on déduit que  $m + m_2 \in S_\sigma$ . Donc  $m = (m + m_2) - m_2 \in \mathbb{Z}S_\sigma$ . D'où  $\mathbb{Z}S_\sigma$  est saturé dans  $M$  (autrement dit,  $M/\mathbb{Z}S_\sigma$  est sans torsion). Ainsi

$$\text{Le tore de } U_\sigma \text{ est } T_N \iff M = \mathbb{Z}S_\sigma \iff \text{rang}(\mathbb{Z}S_\sigma) = n.$$

Grâce à la Proposition III.2.17, pour montrer la dernière équivalence du théorème, il suffit de montrer l'équivalence suivante :

$$\text{rang}(\mathbb{Z}S_\sigma) = n \iff \dim \sigma^\vee = n.$$

Si  $S_\sigma = \mathbb{N}\mathcal{A}$ , en suivant la démonstration du lemme de Gordan (Proposition III.2.28), on voit que  $\sigma^\vee = \text{Cone}(\mathcal{A})$ . Donc  $\dim \sigma^\vee = \dim \text{Cone}(\mathcal{A})$ . Comme  $\dim \text{Cone}(\mathcal{A}) = \dim \text{vect}(\mathcal{A}) = \text{rang}(\mathbb{Z}\mathcal{A}) = \text{rang}(\mathbb{Z}S_\sigma)$ , on conclut que  $\dim \sigma^\vee = \text{rang}(\mathbb{Z}S_\sigma)$ .  $\square$

**EXEMPLE III.2.32.** On revient à l'exemple  $\sigma_1$  de l'exercice III.2.12. D'après cet exercice, on a  $U_{\sigma_1} = \mathbb{V}(xy - zw)$ .

L'exercice suivant caractérise les variétés toriques affines provenant de cônes lisses.

**EXERCICE III.2.33.** Soient  $0 \leq r \leq n$  deux entiers. Soit  $\sigma := \text{Cone}(e_1, \dots, e_r) \subset \mathbb{R}^n$ .

- (1) Montrer que  $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, \dots, e_r, \pm e_{r+1}, \dots, \pm e_n)$ .
- (2) En déduire que  $U_\sigma = \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}$ .

- (3) En déduire que toute variété affine torique obtenue à partir d'un cône lisse est isomorphe à  $\mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}$  pour un tel couple  $(r, n)$ . On verra dans la suite du cours que toutes les variétés toriques affines lisses proviennent d'un cône lisse, et sont donc isomorphes à un tel modèle.

On retrouve aussi le cône normal rationnel.

EXERCICE III.2.34. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $\sigma = \text{Cone}(de_1 - e_2, e_2) \subset \mathbb{R}^2$ .

- (1) Montrer que  $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, e_1 + de_2)$ .  
 (2) Soit  $\mathcal{A} = \{e_1 + \beta e_2 : \beta \in \{0, 1, \dots, d\}\} \subset \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2 = S_\sigma$ . Montrer que  $S_\sigma = \mathbb{N}\mathcal{A}$ .  
 (3) Conclure que  $U_\sigma$  est isomorphe au cône rationnel normal  $\hat{C}_d$

On remarque dans l'exemple du cône normal rationnel un fait important : les générateurs du cône dual  $\sigma^\vee$  ne sont pas en général des générateurs du semi-groupe  $S_\sigma$ . De manière générale, les générateurs ajoutés pour engendrer  $S_\sigma$  sont la cause de singularités (comparer avec les exemples de l'exercice III.2.33).

L'exemple précédent soulève un problème important dans les calculs explicites : pour un cône  $\sigma$  donné, déterminer un système de générateur du semi-groupe  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  associé. Lorsque  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  est un cône de dimension maximale, le semi-groupe  $S_\sigma$  possède un unique ensemble minimal de générateurs, appelé *Base de Hilbert* de  $S_\sigma$ . On va décrire cette base et ses propriétés. Ces résultats seront très utiles en pratique.

DÉFINITION III.2.35. Un élément  $m \in S_\sigma$  non nul est dit *irréductible* si  $m = m' + m''$  pour  $m', m'' \in S_\sigma$  implique  $m' = 0$  ou  $m'' = 0$ .

La base de Hilbert est obtenue avec les éléments irréductibles du semi-groupe :

PROPOSITION III.2.36. Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône de dimension maximale et  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  le semi-groupe associé. Alors

$$\mathcal{H} = \{m \in S_\sigma : m \text{ est irréductible}\}$$

possède les propriétés suivantes :

- (1)  $\mathcal{H}$  est fini et engendre  $S_\sigma$ .  
 (2)  $\mathcal{H}$  contient les générateurs minimaux de  $\sigma^\vee$ .  
 (3)  $\mathcal{H}$  est l'ensemble minimal engendrant  $S_\sigma$  au sens de l'inclusion.

DÉMONSTRATION. Comme  $\sigma$  est de dimension maximale, par la Proposition III.2.17,  $\sigma^\vee$  est fortement convexe. On peut donc déterminer un élément  $u \in \sigma \cap N$ , non nul, et tel que  $\langle m, u \rangle \in \mathbb{N}^*$  pour tout  $m \in S_\sigma$  (considérer un point dans l'intérieur qui soit dans le réseau).

Supposons maintenant  $m \in S_\sigma$  ne soit pas irréductible. On écrit alors  $m = m' + m''$  avec  $m', m'' \in S_\sigma \setminus \{0\}$ . On a

$$\langle m, u \rangle = \langle m', u \rangle + \langle m'', u \rangle$$

et par choix de  $u$ ,

$$0 < \langle m', u \rangle < \langle m, u \rangle \text{ et } 0 < \langle m'', u \rangle < \langle m, u \rangle.$$

En itérant le procédé, on voit que tout élément  $m \in S_\sigma$  se décompose comme somme d'irréductibles, et donc  $\mathcal{H}$  engendre  $S_\sigma$ . Comme  $S_\sigma$  admet un ensemble de générateurs fini (lemme de Gordan),  $\mathcal{H}$  est fini. Ceci prouve le point (1).

On passe au point (2). Soit maintenant  $\rho \subset \sigma^\vee$  un rayon de  $\sigma^\vee$  et soit  $v_\rho$  le gnrérateur minimal de  $\rho$ . Il s'agit de montrer que  $v_\rho$  est irréductible. On fixe  $u \in \text{Relint}(\rho^*) \cap N$ , de telle

sorte que  $\rho = H_u \cap \sigma^\vee$  (voir exercice III.2.16). Si jamais il existe  $m, m' \in S_\sigma$  avec  $v_\rho = m + m'$ , on a

$$0 = \langle v_\rho, u \rangle = \langle m, u \rangle + \langle m', u \rangle.$$

Comme  $u \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ ,  $\langle m, u \rangle \geq 0$  et  $\langle m', u \rangle \geq 0$ , d'où

$$\langle m, u \rangle = \langle m', u \rangle = 0,$$

et donc  $m, m' \in H_u \cap \sigma^\vee = \rho$ . Or  $v_\rho$  est un générateur minimal de  $\rho \cap M$ , d'où  $m = 0$  ou  $m' = 0$ . On a donc  $v_\rho$  irréductible, ce qui prouve (2).

Enfin, pour (3), soit  $\mathcal{K}$  un ensemble générateur de  $S_\sigma$ . Soit  $h \in \mathcal{H}$ . Pour montrer que  $h \in \mathcal{K}$ , il suffit de décomposer  $h$  dans la famille génératrice  $\mathcal{K}$ . L'irréductibilité de  $h$  impose alors que  $h \in \mathcal{K}$ . D'où le résultat.  $\square$

**DÉFINITION III.2.37.** Les éléments de  $\mathcal{H}$  sont appelés *générateurs minimaux* de  $S_\sigma$ .

**REMARQUE III.2.38.** La Proposition III.2.36 est vraie pour tout semi-groupe affine vérifiant  $S \cap (-S) = \{0\}$ .

On termine cette section avec un autre exemple en dimension supérieure.

**EXERCICE III.2.39.** On considère le cône simplicial  $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_2 + 2e_3) \subset \mathbb{R}^3$  pour le réseau  $\mathbb{Z}^3$ .

- (1) Décrire  $\sigma^\vee$  et déterminer les générateurs minimaux de  $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^3$ .
- (2) Calculer l'idéal de la variété torique affine  $U_\sigma$ .
- (3) Conclure que  $U_\sigma \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_6]/(x_1x_2 - x_3x_4, x_1^2 - x_3x_5, x_2^2 - x_3x_6))$ .

**Fin du troisième cours (26/01/2021)**

### 3. Propriétés des variétés toriques affines

Dans cette partie, on donne quelques propriétés élémentaires des variétés toriques affines. On commence par caractériser les points de ces variétés en termes de semi-groupes. Ensuite, on décrira en termes de cônes quand elles sont normales, singulières ou lisses. Enfin, on traduira la notion de morphismes dans le langage des cônes.

**3.1. Points des variétés toriques affines.** On commence par donner plusieurs caractérisations des points des variétés toriques affines.

**PROPOSITION III.3.1.** Soit  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  la variété torique affine associée au semi-groupe affine  $S$ . Les ensembles suivants sont en correspondance bijective :

- (1) les points de  $p \in V$  ;
- (2) les idéaux maximaux  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[V]$  ;
- (3) les homomorphismes de semi-groupes  $\gamma : S \rightarrow \mathbb{C}$  où  $\mathbb{C}$  est considéré comme un semi-groupe via la multiplication.

**DÉMONSTRATION.** On a déjà vu dans le Chapitre I la correspondance entre points et idéaux maximaux. On va montrer la correspondance entre points et homomorphismes de semi-groupes.

Soit  $p \in V$ . On lui associe le morphisme de semi-groupes :

$$\begin{aligned} \gamma : S &\rightarrow \mathbb{C} \\ m &\mapsto \chi^m(p). \end{aligned}$$

Ce dernier est bien défini comme  $\chi^m \in \mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[V]$ .

Dans l'autre direction, soit  $\gamma : S \rightarrow \mathbb{C}$  un morphisme de semi-groupes. Comme  $\{\chi^m, | m \in S\}$  est une base de  $\mathbb{C}[S]$ ,  $\gamma$  induit un morphisme linéaire surjectif de  $\mathbb{C}[S]$  vers  $\mathbb{C}$ , dont le noyau est un idéal maximal de  $\mathbb{C}[S]$ , et donc un point de  $V$ .  $\square$

Dans l'exercice qui suit, on propose une version concrète de la correspondance entre semi-groupes et points.

EXERCICE III.3.2. Soit  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  la variété torique affine associée à un semi-groupe affine  $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$ , avec  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$  un ensemble de générateurs de  $S$ . Soit  $\gamma : S \rightarrow \mathbb{C}$  un morphisme de semi-groupes. On pose  $p = (\gamma(m_1), \dots, \gamma(m_s)) \in \mathbb{C}^s$ .

(1) Montrer que  $p \in Y_{\mathcal{A}}$ .

(2) Montrer que  $p$  correspond au point construit dans la preuve de la Proposition III.3.1.

Pour cela, on rappelle que  $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$ .

Comme application de ce résultat, on décrit l'action du tore sur  $V = Y_{\mathcal{A}}$ . Dans la démonstration de la Proposition III.1.4, on a montré que l'action de  $T_N$  sur  $Y_{\mathcal{A}}$  est induite par l'action usuelle de  $(\mathbb{C}^*)^s$  sur  $\mathbb{C}^s$ . Dans le Lemme III.3.3, on montre comment voir l'action de  $T_N$  sur  $Y_{\mathcal{A}}$  de manière intrinsèque à travers les homomorphismes de semi-groupes.

LEMME III.3.3. Soit  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  une variété affine torique associée au semi-groupe affine  $S$ . On suppose que le tore de  $V$  est  $T_N$ , avec  $N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}S, \mathbb{Z})$  (i.e.  $M = \mathbb{Z}S$ ). Soient  $\gamma : S \rightarrow \mathbb{C}$  un homomorphisme de semi-groupes et  $p$  le point de  $V$  associé. Alors, pour  $t \in T_N$  fixé, le point  $t \cdot p$  est associé à l'homomorphisme de semi-groupes  $m \mapsto \chi^m(t)\gamma(m)$ .

DÉMONSTRATION. On suppose que  $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$ , où  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$  est un ensemble de générateurs de  $S$ . On a alors  $V = Y_{\mathcal{A}}$  et le point  $p$  est  $p = (\gamma(m_1), \dots, \gamma(m_s)) \in \mathbb{C}^s$ . De plus, suivant la preuve de la Proposition III.1.4, et comme  $M = \mathbb{Z}S$ , on a une suite exacte courte :

$$(3) \quad 0 \rightarrow L = \ker(\hat{\Phi}_{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathbb{Z}^s \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Par dualité, et en tensorisant par  $\mathbb{C}^*$  on obtient :

$$(4) \quad 1 \rightarrow T_N \rightarrow (\mathbb{C}^*)^s \rightarrow L^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \rightarrow 1$$

L'injection  $T_N \rightarrow (\mathbb{C}^*)^s$  est simplement le morphisme  $\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$ . On en déduit que l'action de  $t \in T_N$  sur  $p \in V$ , plongée dans  $\mathbb{C}^s$ , est donnée par :

$$t \cdot p = (\chi^{m_1}(t)\gamma(m_1), \dots, \chi^{m_s}(t)\gamma(m_s)).$$

L'homomorphisme de semi-groupe associé est bien  $m \mapsto \chi^m(t)\gamma(m)$ .  $\square$

On aurait aussi pu traduire l'action de son tore sur une variété torique affine via son algèbre de fonctions régulières. Ceci est l'objet de l'exercice suivant.

EXERCICE III.3.4. Avec les notations du lemme précédent, montrer que le morphisme

$$T_N \times V \rightarrow V$$

donné par l'action du tore sur  $V$  est induit par le morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[S] &\rightarrow \mathbb{C}[M] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S] \\ \chi^m &\mapsto \chi^m \otimes \chi^m. \end{aligned}$$

On va maintenant étudier un point distingué pour une variété torique affine : le point fixe sous l'action du tore. Pour que celui-ci existe, on a besoin de l'analogie pour les semi-groupes de la notion de forte convexité :

DÉFINITION III.3.5. On dit qu'un semi-groupe  $S$  est *pointé* si  $S \cap (-S) = \{0\}$ , c'est-à-dire 0 est l'unique élément inversible.

PROPOSITION III.3.6. Soit  $V$  une variété torique affine. Alors :

- (1) Si  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  pour un semi-groupe affine  $S$ , alors l'action du tore a un point fixe si et seulement si  $S$  est pointé ; dans ce cas, cet unique point fixe est donnée par l'homomorphisme de semi-groupe  $\gamma : S \rightarrow \mathbb{C}$  défini par

$$\gamma : m \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases} .$$

- (2) Si  $V = Y_{\mathcal{A}}$  pour  $\mathcal{A} \subset S \setminus \{0\}$ , alors l'action du tore a un point fixe si et seulement si  $0 \in Y_{\mathcal{A}}$ , et dans ce cas 0 est l'unique point fixe.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord on remarque que si  $S$  est pointé, alors  $\gamma$  est bien défini. En effet, si  $m, m' \in S$ ,  $\gamma(m + m') = \gamma(m)\gamma(m') = 0$  si et seulement si  $\gamma(m) = 0$  ou  $\gamma(m') = 0$ . Ceci équivaut à  $m \neq 0$  ou  $m' \neq 0$ . On doit donc avoir  $m + m' \neq 0$  si et seulement si  $m \neq 0$  ou  $m' \neq 0$ , ce qui donne  $m = -m'$  si et seulement si  $m = m' = 0$ , i.e.  $S$  est pointé. Maintenant, d'après le Lemme III.3.3, si  $p$  est le point associé à un semi-groupe affine  $\alpha : S \rightarrow \mathbb{C}$ , alors  $p$  est un point fixe de  $T_N$  si et seulement si

$$\forall m \in S \setminus \{0\}, \forall t \in T_N, \chi^m(t)\alpha(m) = \alpha(m),$$

ce qui impose bien  $\alpha = \gamma$ .

Pour le second point, supposons tout d'abord que  $V$  ait un point fixe  $p \in V \subset \mathbb{C}^s$ . Alors d'après le premier point,  $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$  est pointé et  $p \in \mathbb{C}^s$  est donné par  $\gamma$ . De manière explicite, on a  $p = (\gamma(m_1), \dots, \gamma(m_s)) = (0, \dots, 0)$  car  $\mathcal{A}$  ne contient pas 0. Réciproquement, si l'origine appartient à  $V \subset \mathbb{C}^s$ , c'est un point fixe de  $(\mathbb{C}^*)^s$  et donc de  $T_N$ .  $\square$

On en déduit directement le résultat suivant, qui est un premier pas vers la correspondance orbites-cônes des variétés toriques.

COROLLAIRE III.3.7. Soit  $U_{\sigma}$  la variété affine d'un cône  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ . Alors l'action du tore de  $U_{\sigma}$  a un point fixe si et seulement si  $\dim \sigma = \dim N_{\mathbb{R}}$ , et dans ce cas, cet unique point fixe est donné par l'idéal maximal

$$\langle \chi^m \mid m \in S_{\sigma} \setminus \{0\} \rangle \subset \mathbb{C}[S_{\sigma}].$$

**3.2. Normalité et saturation.** On va maintenant démontrer que les variétés toriques affines qui proviennent de cônes sont celles qui sont normales. Par la suite, dans tout le cours, on se restreindra à l'étude de ces dernières.

DÉFINITION III.3.8. Un semi-groupe affine  $S \subset M$  est *saturé* si pour tout  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et tout  $m \in M$ ,  $km \in S$  implique  $m \in S$ .

EXERCICE III.3.9. Si  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  est un cône polyédral rationnel fortement convexe, alors  $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$  est saturé (indication : utiliser la rationalité).

Afin de démontrer le résultat principal de cette section, on utilisera les lemmes suivants, dont les preuves sont laissées en exercice.

LEMME III.3.10. Soit  $\mathcal{A} \subset M$  un ensemble fini. Le semi-groupe  $\mathbb{N}\mathcal{A}$  est saturé dans  $M$  si et seulement si  $\mathbb{N}\mathcal{A} = \text{Cone}(\mathcal{A}) \cap M$ .

DÉMONSTRATION. Indication : utiliser

$$\text{Cone}(\mathcal{A}) \cap M_{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{v \in \mathcal{A}} \lambda_v v \mid \lambda_v \in \mathbb{Q}_+ \right\}.$$

□

LEMME III.3.11. Soient  $N$  un réseau et soit  $u \in N$  un élément primitif (c'est à dire tel que  $\frac{1}{k}u \notin N$  pour tout entier  $k \geq 2$ ). Montrer que  $u$  peut être complété en une  $\mathbb{Z}$ -base de  $N$ .

THÉORÈME III.3.12. Soit  $V$  une variété affine torique de tore  $T_N$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (1)  $V$  est normale ;
- (2)  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ , où  $S \subset M$  est un semi-groupe affine saturé ;
- (3)  $V = U_{\sigma} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma}])$ , où  $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$  et  $\sigma$  est un cône polyédral rationnel fortement convexe.

DÉMONSTRATION. Par le Théorème III.1.21,  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  pour un semi-groupe  $S$  contenu dans un réseau. Par la Proposition III.1.18, le tore  $T_N$  de  $V$  a pour réseau de caractère  $M = \mathbb{Z}S$ . On pose  $n = \dim V$ , et on a  $M \simeq \mathbb{Z}^n$ .

Montrons (1)  $\Rightarrow$  (2). Comme  $V$  est normale,  $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$  est intégralement clos dans son corps de fractions  $\mathbb{C}(V)$ . On suppose que  $km \in S$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $m \in M$ . Comme  $\chi^m$  est une fonction polynomiale sur  $T_N$  et que  $T_N \subset V$ , on déduit que  $\chi^m$  est une fonction rationnelle sur  $V$  (car  $T_N$  est un ouvert de Zariski). Comme  $\chi^m \in \mathbb{C}[S]$  est une racine du polynôme unitaire  $X^k - \chi^{km}$  à coefficient dans  $\mathbb{C}[S]$ , par la définition de normalité de  $V$ ,  $\chi^m \in \mathbb{C}[S]$ . Donc  $m \in S$ , c'est-à-dire  $S$  est saturé.

Montrons (2)  $\Rightarrow$  (3) Soit  $\mathcal{A} \subset S$  un ensemble fini de générateurs de  $S$ . Le semi-groupe  $S$  se trouve dans le cône polyédral rationnel  $\text{Cone}(\mathcal{A}) \subset M_{\mathbb{R}}$ . On a  $\dim \text{Cone}(\mathcal{A}) = n$ . Donc  $\sigma = \text{Cone}(\mathcal{A})^{\vee} \subseteq N_{\mathbb{R}}$  est un cône polyédral rationnel fortement convexe tel que  $S \subset \sigma^{\vee} \cap M$ . Par le Lemme III.3.10, on a  $S = \sigma^{\vee} \cap M = S_{\sigma}$ .

Montrons (3)  $\Rightarrow$  (1) : On va montrer que  $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$  est normal lorsque  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  est un cône polyédral rationnel fortement convexe. Soit  $\rho_1, \dots, \rho_r$  les rayons de  $\sigma$ . Comme  $\sigma$  est engendré par ses rayons, nous avons

$$\sigma^{\vee} = \bigcap_{i=1}^r \rho_i^{\vee} \quad , \quad \text{donc} \quad \mathbb{C}[S_{\sigma}] = \bigcap_{i=1}^r \mathbb{C}[S_{\rho_i}]$$

où  $S_{\rho_i} = \rho_i^{\vee} \cap M$ . Donc pour montrer que  $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$  est normal il suffit de montrer que chaque  $\mathbb{C}[S_{\rho_i}]$  est normal. Soit  $\rho$  un rayon de  $\sigma$ . Le générateur minimal  $u_{\rho} \in \rho \cap N$  de  $\rho$  est un élément primitif. On peut donc trouver (Lemme III.3.11) une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $N$  tel que  $u_{\rho} = e_1$ . Ainsi,  $\rho = \text{Cone}(e_1)$  et

$$\mathbb{C}[S_{\rho}] = \mathbb{C}[x_1, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_2 \dots x_n} \quad .$$

Comme  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  est normal, le localisé  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_2 \dots x_n}$  l'est aussi. D'où le résultat. □

EXEMPLE III.3.13. On déduit du Théorème III.3.12 que  $\mathbb{V}(xy - zw)$  est normale, comme variété torique associée au cône  $\text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ .

On propose le devoir suivant sur le procédé de normalisation des variétés toriques affines.

**Devoir Maison 1 : Normalisation torique affine.** Soit  $S$  un semi-groupe affine et soit  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  la variété torique dont le réseau de caractères est  $M = \mathbb{Z}S$ .

EXERCICE III.3.14. Soient  $\text{Cone}(S)$  le cône engendré par une famille génératrice finie de  $S$  et  $\sigma := \text{Cone}(S)^\vee \subset N_{\mathbb{R}}$ .

- (1) Montrer que  $\sigma$  est un cône polyédral rationnel strictement convexe de  $N_{\mathbb{R}}$ .
- (2) Montrer que le morphisme  $U_\sigma \rightarrow V$  induit par l'inclusion  $\mathbb{C}[S] \subset \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$  est la normalisation de  $V$ .

On illustre ce résultat sur l'exemple :

EXERCICE III.3.15. Soit  $\mathcal{A} = \{(4, 0), (3, 1), (1, 3), (0, 4)\} \subset \mathbb{Z}^2$ .

- (1) Montrer que  $Y_{\mathcal{A}}$  n'est pas normale.
- (2) Identifier la normalisation de  $Y_{\mathcal{A}}$ .

**3.3. Variétés affines toriques lisses.** Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône. Dans cette partie, on étudie à quelle condition la variété  $U_\sigma$  associée au cône  $\sigma$  est lisse. Moralement, le point le plus singulier de  $U_\sigma$  sera son point fixe, quand il existe. Il est donc nécessaire de contrôler l'espace tangent de Zariski en ce point. Si  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  est de dimension maximale, le cône  $\sigma^\vee$  est fortement convexe. Donc  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  admet une base de Hilbert  $\mathcal{H}$  (Proposition III.2.36). On note également  $p_\sigma \in U_\sigma$  l'unique point fixe de l'action du tore sur  $U_\sigma$  (Corollaire III.3.7).

LEMME III.3.16. Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône de dimension maximale et  $T_{p_\sigma}(U_\sigma)$  l'espace tangent de Zariski de la variété affine  $U_\sigma$  au point  $p_\sigma$ . Alors

$$\dim T_{p_\sigma}(U_\sigma) = |\mathcal{H}|.$$

DÉMONSTRATION. Par le Corollaire III.3.7, l'idéal maximal de  $\mathbb{C}[S_\sigma]$  correspondant à  $p_\sigma$  est

$$\mathfrak{m} = \langle \chi^m \mid m \in S_\sigma \setminus \{0\} \rangle.$$

On a alors

$$\mathfrak{m}^2 = \langle \chi^{m+m'} \mid m, m' \in S_\sigma \setminus \{0\} \rangle.$$

Comme  $\{\chi^m\}_{m \in S_\sigma}$  est une base de  $\mathbb{C}[S_\sigma]$ , nous avons

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{m \neq 0} \mathbb{C} \cdot \chi^m = \left( \bigoplus_{m \text{ irréductible}} \mathbb{C} \cdot \chi^m \right) \oplus \left( \bigoplus_{m \text{ réductible}} \mathbb{C} \cdot \chi^m \right) = \left( \bigoplus_{m \in \mathcal{H}} \mathbb{C} \cdot \chi^m \right) \oplus \mathfrak{m}^2.$$

Donc

$$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = |\mathcal{H}|.$$

En utilisant l'isomorphisme  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \mathfrak{m}_{U_\sigma, p_\sigma}/\mathfrak{m}_{U_\sigma, p_\sigma}^2$  et le fait que  $T_{p_\sigma}(U_\sigma)$  est le dual de  $\mathfrak{m}_{U_\sigma, p_\sigma}/\mathfrak{m}_{U_\sigma, p_\sigma}^2$ , on conclut que  $\dim T_{p_\sigma}(U_\sigma) = |\mathcal{H}|$ .  $\square$

EXEMPLE III.3.17. L'espace tangent de Zariski du cône normal rationnel  $\widehat{C}_d$  en l'origine est de dimension  $d + 1$ . On en déduit que  $\mathbb{C}^{d+1}$  est le plus petit espace affine dans lequel on peut plonger  $\widehat{C}_d$ .

Pour caractériser les variétés toriques lisses, il faudra aussi traiter le cas où  $\sigma$  n'est pas de dimension maximale. On se ramènera à la situation  $\dim(\sigma) = \dim(U_\sigma)$  à l'aide du lemme suivant, laissé en exercice.



EXERCICE III.3.18. Soit  $N_1 \subset N$  un sous-réseau saturé d'un réseau  $N$ . Alors il existe un sous réseau  $N_2 \subset N$  tel que  $N = N_1 \oplus N_2$ .

On peut maintenant montrer le résultat principal de cette section.

THÉORÈME III.3.19. *Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône. La variété  $U_{\sigma}$  est lisse si et seulement si  $\sigma$  est lisse. De plus, toute variété torique affine lisse est de cette forme.*

Comme application de ce théorème, dans le Chapitre V, on donnera une classification des surfaces toriques complètes lisses.

DÉMONSTRATION. Si une variété torique affine  $V$  est lisse, alors elle est normale. Par le Théorème III.3.12, on a  $V = U_{\sigma}$  pour un cône  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ . On note  $n = \dim U_{\sigma} = \dim N_{\mathbb{R}}$ .

On suppose que  $\sigma$  est lisse. Il existe  $r \in \{0, \dots, n\}$  et une partie  $(e_1, \dots, e_r)$  d'une  $\mathbb{Z}$ -base de  $N$  tel que  $\sigma = \text{Cone}(e_1, \dots, e_r)$  (avec  $\sigma = \{0\}$  si  $r = 0$ ). On calcul alors  $\sigma^{\vee}$ . Si

$$m = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j^* \in \sigma^{\vee}$$

fixé où  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  et

$$u = \sum_{j=1}^r \lambda_j e_j \in \sigma$$

quelconque, on a

$$\langle m, u \rangle = \sum_{j=1}^r \lambda_j \alpha_j.$$

Comme  $\langle m, u \rangle \geq 0$  pour tout  $u \in \sigma$ , on déduit que les réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  sont positifs ou nuls. On a donc

$$\sigma^{\vee} = \text{Cone}(e_1^*, \dots, e_r^*, \pm e_{r+1}^*, \dots, \pm e_n^*).$$

On pose alors  $\mathcal{A} = \{e_1^*, \dots, e_r^*, \pm e_{r+1}^*, \dots, \pm e_n^*\}$ , de telle sorte que

$$S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{N}\mathcal{A},$$

et

$$\mathbb{C}[S_{\sigma}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}].$$

Comme  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_{r+1} \cdots x_n}$ , nous avons

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma}]) = \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{V}(x_{r+1} \cdots x_n) = \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}.$$

Ainsi,  $U_{\sigma} \cong \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}$  est une variété lisse.

Dans l'autre direction, on suppose que  $U_{\sigma}$  est lisse. On considère alors deux cas, en fonction de la dimension de  $\sigma$ . On suppose dans un premier cas que  $\dim \sigma = n$ . On a alors un unique point fixe  $p_{\sigma} \in U_{\sigma}$  sous l'action du tore sur  $U_{\sigma}$ , et comme  $U_{\sigma}$  est lisse,  $\dim T_{p_{\sigma}}(U_{\sigma}) = n$ . Par le Lemme III.3.16, le cardinal de la base de Hilbert  $\mathcal{H}$  de  $S_{\sigma}$  est  $n$ . Comme chaque rayon  $\rho \subset \sigma^{\vee}$  contribue à un élément de  $\mathcal{H}$  (Proposition III.2.36) et comme  $\dim \sigma^{\vee} = n$ , on a

$$n = |\mathcal{H}| \geq |\{\text{rayons } \rho \subset \sigma^{\vee}\}| \geq n.$$

Donc  $\sigma^{\vee}$  possède exactement  $n$  rayons et les éléments de  $\mathcal{H}$  sont les générateurs minimaux de ces rayons. Enfin,  $M = \mathbb{Z}S_{\sigma}$ , et les  $n$  générateurs primitifs des rayons de  $\sigma^{\vee}$  engendrent le réseau  $M \simeq \mathbb{Z}^n$ . Ils forment donc une base de  $M$  et  $\sigma^{\vee}$  est lisse. Par dualité, on déduit que  $\sigma$  est lisse.

On traite désormais le cas  $\dim \sigma = r < n$  en se ramenant au premier cas. Soit  $N_1$  le plus petit sous réseau saturé de  $N$  contenant les générateurs de  $\sigma$ . Le groupe  $N/N_1$  est sans torsion, donc il existe un sous réseau  $N_2$  de  $N$  tel que  $N = N_1 \oplus N_2$  (cf Exercice III.3.18). De plus,  $\text{rang}(N_1) = r$ . L'égalité  $N = N_1 \oplus N_2$ , implique que  $M = M_1 \oplus M_2$  où  $M_i$  est le dual de  $N_i$ . Comme  $\sigma \subset (N_1)_{\mathbb{R}} \subset N_{\mathbb{R}}$ , cela donne deux variétés affines toriques

$$U_{\sigma, N_1} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap M_1]) \quad \text{et} \quad U_{\sigma, N} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap M])$$

de dimensions  $r$  et  $n$  respectivement. Comme

$$S_{\sigma, N} = S_{\sigma, N_1} \oplus M_2,$$

on obtient

$$\mathbb{C}[S_{\sigma, N}] \simeq \mathbb{C}[S_{\sigma, N_1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[M_2].$$

Ainsi, nous avons

$$U_{\sigma, N} \cong U_{\sigma, N_1} \times T_{N_2} \cong U_{\sigma, N_1} \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}.$$

Comme  $U_{\sigma} = U_{\sigma, N}$  est lisse par hypothèse, on a  $U_{\sigma, N_1}$  lisse. D'après le premier cas, on déduit que  $\sigma$  est lisse.  $\square$

**3.4. Morphismes toriques entre variétés toriques affines.** La dernière section de ce chapitre donne une caractérisation des morphismes *toriques* entre variétés toriques affines. Ce sont des morphismes *équivariants* sous l'action des tores qui sont induits par des morphismes de groupes entre les tores.

**DÉFINITION III.3.20.** Soient  $V_i = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_i])$  deux variétés affines toriques définies par des semi-groupes affines  $S_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Un morphisme de variétés affines  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  est dit *torique* si l'application associée entre anneaux de coordonnées  $\varphi^* : \mathbb{C}[S_2] \rightarrow \mathbb{C}[S_1]$  est induite par un homomorphisme de semi-groupes  $\hat{\varphi} : S_2 \rightarrow S_1$ .

Avec les notations de la définition précédente, voici une caractérisation géométrique de ces morphismes :

**PROPOSITION III.3.21.** Soit  $T_{N_i}$  le tore de la variété affine torique  $V_i$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ . Soit  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  un morphisme de variétés affines. Alors :

- (1) Le morphisme  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  est torique si et seulement si  $\varphi(T_{N_1}) \subset T_{N_2}$  et  $\varphi|_{T_{N_1}} : T_{N_1} \rightarrow T_{N_2}$  est un homomorphisme de groupes.
- (2) Le morphisme  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  est équivariant, c'est-à-dire pour tout  $t \in T_{N_1}$  et  $p \in V$ ,

$$\varphi(t \cdot p) = \varphi(t) \cdot \varphi(p).$$

**DÉMONSTRATION.** On commence par montrer (1). Supposons que  $\varphi$  soit torique. Il provient alors de  $\hat{\varphi} : S_2 \rightarrow S_1$  qui est un morphisme de semi-groupes. Ce dernier s'étend en un morphisme de groupes  $\tilde{\varphi} : M_2 \rightarrow M_1$ , où  $M_i = \mathbb{Z}S_i$  est le réseau de caractères de  $V_i$ , et donne le diagramme commutatif

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[S_2] & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathbb{C}[S_1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[M_2] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{C}[M_1]. \end{array}$$

On applique alors le foncteur Spec pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_{N_1} & \rightarrow & T_{N_2}. \end{array}$$

On en déduit que  $\varphi(T_{N_1}) \subset T_{N_2}$ . De plus, comme  $T_{N_i} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_i, \mathbb{C}^*)$ , et comme  $\varphi$  est induit par un morphisme de groupes  $M_2 \rightarrow M_1$ ,  $\varphi|_{T_{N_1}}$  est un morphisme de groupes.

Réciproquement, si  $\varphi$  vérifie ces propriétés, on a encore un diagramme (5), et  $\tilde{\varphi}$  est induit par un morphisme de groupes  $\tilde{\varphi} : M_2 \rightarrow M_1$  (on rappelle que les morphismes de groupes entre tores sont des morphismes de tores, cf Chapitre II). Mais comme  $\varphi^*(\mathbb{C}[S_2]) \subset \mathbb{C}[S_1]$ , on a  $\tilde{\varphi}(\mathbb{C}[M_2]) \subset \mathbb{C}[M_1]$ , et donc  $\tilde{\varphi}$  se restreint en un morphisme de semi-groupes  $\hat{\varphi} : S_2 \rightarrow S_1$ .

Pour le point (2), on rappelle que l'action de  $T_{N_i}$  sur  $V_i$  est donnée par un morphisme  $\Phi_i : T_{N_i} \times V_i \rightarrow V_i$ . Le fait que  $\varphi$  soit équivariant est équivalent à

$$\Phi_2 \circ (\varphi|_{T_{N_1}} \times \varphi) = \varphi \circ \Phi_1.$$

Cette égalité est vraie sur  $T_{N_1} \times T_{N_1}$  car  $\phi|_{T_{N_1}}$  est un morphisme de groupes. Comme  $T_{N_1} \times T_{N_1}$  est Zariski dense, on obtient l'égalité sur  $T_{N_1} \times V_1$ .  $\square$

EXERCICE III.3.22. Montrer que le morphisme de normalisation de l'exercice III.3.14 est un morphisme torique.

Pour caractériser les morphismes toriques entre variétés associées à des cônes, on introduit quelques notations. Un homomorphisme  $\bar{\varphi} : N_1 \rightarrow N_2$  entre deux réseaux induit :

- un morphisme de groupes  $\varphi : T_{N_1} \rightarrow T_{N_2}$ ,
- une application linéaire  $\bar{\varphi}_{\mathbb{R}} : (N_1)_{\mathbb{R}} \rightarrow (N_2)_{\mathbb{R}}$ .

PROPOSITION III.3.23. Soient  $\sigma_1 \subset (N_1)_{\mathbb{R}}$  et  $\sigma_2 \subset (N_2)_{\mathbb{R}}$  deux cônes, ainsi qu'un morphisme de réseaux  $\bar{\varphi} : N_1 \rightarrow N_2$ . Alors,  $\varphi : T_{N_1} \rightarrow T_{N_2}$  s'étend en un morphisme torique  $\varphi : U_{\sigma_1} \rightarrow U_{\sigma_2}$  si et seulement si  $\bar{\varphi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$ .

DÉMONSTRATION. On pose  $S_i$  le semi-groupe affine de  $U_{\sigma_i}$  de telle sorte que  $\mathbb{Z}S_i = M_i$  et  $\text{Cone}(S_i) = \sigma_i^{\vee}$ . On remarque tout d'abord que  $\bar{\varphi}$  induit un morphisme  $\hat{\varphi} : M_2 \rightarrow M_1$ . On laisse en exercice de conclure que  $\hat{\varphi}$  se restreint en un morphisme de semi-groupes  $S_2 \rightarrow S_1$  si et seulement si  $\bar{\varphi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$ .  $\square$

Une classe intéressante d'exemples de morphismes toriques est donnée par des quotients finis, où le cône  $\sigma$  est fixé, mais le réseau  $N$  varie.

EXEMPLE III.3.24. On considère dans  $\mathbb{R}^2$  le cône  $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2)$ . On définit les réseaux  $N' = \mathbb{Z}^2$  et

$$N := \left\{ \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \mid a, b \in \mathbb{Z}, a + b \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

On a alors  $\sigma \subset N'_{\mathbb{R}} \subset N_{\mathbb{R}}$ . Les réseaux duaux satisfont

$$M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, a + b \equiv 0 \pmod{2}\} \subset M' = \mathbb{Z}^2$$

et  $\sigma^{\vee} \subset M'_{\mathbb{R}} \subset M_{\mathbb{R}}$ . Les variétés toriques associées sont

$$U_{\sigma, N'} = \mathbb{C}^2$$

et

$$U_{\sigma, N} = \hat{C}_2.$$

L'inclusion  $N' \subset N$  induit un morphisme torique

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \widehat{C}_2.$$

On peut préciser ce morphisme. On pose  $\mu_2 = \{\pm 1\} \simeq N/N'$ . Ce groupe agit sur  $U_{\sigma, N'} = \text{Spec}(\mathbb{C}[s, t]) \simeq \mathbb{C}^2$  par  $-1 \cdot (s, t) = (-s, -t)$ . Cette action induit une action de  $\mu_2$  sur  $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M']$  et l'anneau des invariants sous cette action est exactement

$$\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M']^{\mu_2} = \mathbb{C}[s^2, st, t^2] = \mathbb{C}[\widehat{C}_2].$$

Le morphisme  $\varphi$  est simplement le morphisme quotient :

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\mu_2 \simeq \widehat{C}_2.$$

**Devoir maison 2 : quotients finis toriques affines.** On va généraliser l'exemple précédent. Soit  $N' \subset N$  deux réseaux, avec  $N'$  d'indice fini dans  $N$ . On fixe  $\sigma \subset N'_\mathbb{R} = N_\mathbb{R}$  un cône. L'inclusion  $N' \subset N$  induit un morphisme torique

$$\varphi : U_{\sigma, N'} \rightarrow U_{\sigma, N}.$$

EXERCICE III.3.25. On note  $M$  et  $M'$  les réseaux duaux de  $N$  et  $N'$ . On pose  $G := N/N'$ .

(1) Montrer que l'on a des isomorphismes

$$G \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^*) = \ker(T_{N'} \rightarrow T_N).$$

(2) Montrer que  $G$  agit sur  $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M']$ .

(3) Montrer que l'anneau des invariants sous cette action est

$$\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M']^G = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M].$$

(4) Montrer que  $G$  agit sur  $U_{\sigma, N'}$  et que le morphisme  $\varphi$  est constant sur les  $G$ -orbites, induisant une bijection

$$U_{\sigma, N'}/G \simeq U_{\sigma, N}.$$

Fin du quatrième cours (02/02/2021)

## Variétés toriques

Les variétés toriques affines du Chapitre III vont nous servir de modèles locaux pour définir les variétés toriques abstraites, comme dans le Chapitre I, Section 2.

**DÉFINITION IV.0.1.** Une variété torique est une variété irréductible  $X$  contenant un tore complexe  $T_N$  comme sous-ensemble ouvert de Zariski et telle que l'action de  $T_N$  sur lui-même s'étende en une action algébrique sur  $X$ .

**EXEMPLE IV.0.2.** Bien entendu,  $(\mathbb{C}^*)^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  et  $\mathbb{CP}^n$  sont des variétés toriques.

Dans la suite, on va se restreindre aux variétés toriques normales et séparées. On verra dans la Section 1 comment ces variétés sont obtenues à partir d'éventails. On donnera également un critère de régularité et de complétude. Puis dans la Section 2 on donnera une classification des orbites de l'action du tore pour toute variété torique. Enfin, dans la Section 3, on décrira les morphismes toriques.

### 1. Éventails et variétés toriques normales

Dans cette section, on construit la variété torique  $X_\Sigma$  associée à un éventail de  $N_{\mathbb{R}}$ . Le procédé utilisé est le recollement de variétés affines, comme dans le Chapitre I. On commence donc par décrire les ouverts affines utiles pour le recollement.

**1.1. Faces d'un cône et ouverts affines.** Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône (polyédral rationnel strictement convexe). La proposition suivante va nous permettre de décrire les ouverts  $T_N$ -invariants de  $U_\sigma$ . On rappelle que toute face  $\tau \subset \sigma$  s'écrit  $\tau = \sigma \cap H_m$  pour un  $m \in \sigma^\vee \cap M$  avec  $H_m = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle = 0\}$ .

**PROPOSITION IV.1.1.** Soit  $\tau = H_m \cap \sigma$  une face de  $\sigma$  pour  $m \in \sigma^\vee \cap M$ . Alors  $\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M]$  est la localisation de  $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$  au point  $\chi^m \in \mathbb{C}[S_\sigma]$ . C'est à dire,

$$\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^m}.$$

**DÉMONSTRATION.** On fixe un ensemble fini  $S \subset N$  tel que  $\sigma = \text{Cone}(S)$ . L'inclusion  $\tau \subset \sigma$  implique  $S_\sigma \subset S_\tau$ . De plus, comme pour tout  $u \in \tau$ ,  $\langle m, u \rangle = 0$ , on a  $\pm m \in \tau^\vee$ . Donc

$$S_\sigma + \mathbb{Z} \cdot (-m) \subset S_\tau.$$

On montre l'inclusion inverse. Soit  $m' \in S_\tau$  fixé. On pose

$$C = \max_{u \in S} |\langle m', u \rangle| \in \mathbb{N}.$$

On a alors par choix de  $C$  que  $Cm + m' \in S_\sigma$ . En effet, soit  $u \in S$  fixé. Si  $\langle m, u \rangle = 0$ , alors  $u \in \tau$ . Donc  $\langle m', u \rangle \geq 0$ , c'est-à-dire  $\langle Cm + m', u \rangle \geq 0$ . Si  $\langle m, u \rangle \neq 0$ , alors  $\langle m, u \rangle \geq 1$ . Donc  $\langle Cm + m', u \rangle \geq C\langle m, u \rangle - C \geq 0$ . Ainsi,  $m' \in S_\sigma + C(-m)$  et

$$S_\tau \subset S_\sigma + \mathbb{Z}(-m).$$

On a donc montré que

$$(6) \quad S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z} \cdot (-m)$$

ce qui entraîne  $\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^m}$ .  $\square$

Soit  $\tau = H_m \cap \sigma$  une face de  $\sigma$ . D'après la Proposition III.3.23, l'identité  $N \rightarrow N$  et l'inclusion  $\tau \subset \sigma$  induisent un morphisme torique  $U_\tau \rightarrow U_\sigma$  associé à l'inclusion  $\mathbb{C}[S_\sigma] \subset \mathbb{C}[S_\tau]$ . Grâce à la Proposition IV.1.1, on a

$$(7) \quad U_\tau = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\tau]) = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^m}) = (\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]))_{\chi^m} = (U_\sigma)_{\chi^m} \subset U_\sigma.$$

On en déduit que  $U_\tau$  est un ouvert affine  $T_N$ -invariant de la variété  $U_\sigma$ . En particulier, si deux cônes  $\sigma$  et  $\sigma'$  s'intersectent le long d'une face commune  $\tau = \sigma \cap \sigma'$ , on obtient les inclusions

$$U_\sigma \supset U_\tau \subset U_{\sigma'}.$$

On va pouvoir recoller  $U_\sigma$  et  $U_{\sigma'}$  le long de  $U_\tau$ , avec compatibilité de l'action de  $T_N$ .

REMARQUE IV.1.2. C'est pour cela que l'on utilise  $\sigma$ , et non pas  $\sigma^\vee$ , pour décrire la variété torique  $U_\sigma$ . L'application  $\sigma \mapsto U_\sigma$  préserve les inclusions, ce qui n'est pas vrai pour les faces duales.

On termine par une proposition, élément clé pour montrer que la variété associée à un éventail est séparée.

PROPOSITION IV.1.3. *Si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$  et  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ , alors  $S_\tau = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$ .*

DÉMONSTRATION. L'inclusion  $S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2} \subset S_\tau$  découle du fait que  $\sigma_1^\vee + \sigma_2^\vee = (\sigma_1 \cap \sigma_2)^\vee = \tau^\vee$ .

Soit  $p \in S_\tau$  et  $m \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2^\vee) \cap M$  tel que  $\sigma_1 \cap H_m = \sigma_2 \cap H_m = \tau$ . En appliquant (6) à  $\sigma_1$ , on obtient  $p = q_1 + l(-m)$  où  $q_1 \in S_{\sigma_1}$  et  $l \in \mathbb{N}$ . Comme  $-m \in \sigma_2^\vee$ , on déduit que  $p \in S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$ .  $\square$

**1.2. Éventails et recollement.** La construction d'une variété torique à partir de recollement de variétés affines suggère la définition suivante.

DÉFINITION IV.1.4. Un *éventail*  $\Sigma$  dans  $N_{\mathbb{R}}$  est une collection finie de cônes (polyédraux rationnels strictement convexes) de  $N_{\mathbb{R}}$  telle que

- (1) Pour tout cône  $\sigma \in \Sigma$ , les faces de  $\sigma$  sont aussi dans  $\Sigma$ .
- (2) Pour tout  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ , l'intersection  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  est une face de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

De plus si  $\Sigma$  est un éventail, alors

- i. Le *support* de  $\Sigma$  est le sous-ensemble de  $N_{\mathbb{R}}$  :

$$|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \subset N_{\mathbb{R}}.$$

- ii.  $\Sigma(r)$  est l'ensemble des cônes de dimensions  $r$  de  $\Sigma$ .

On montre maintenant comment les cônes d'un éventail permettent la construction d'une variété torique. Par le Théorème III.2.29, chaque cône  $\sigma \in \Sigma$  donne une variété affine torique  $U_\sigma$ . Pour toute face  $\tau$  de  $\sigma$  donnée par  $\tau = \sigma \cap H_m$ , on a  $U_\tau = (U_\sigma)_{\chi^m}$ . Si  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ , le Lemme III.2.20 nous donne l'existence de  $m \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2^\vee) \cap M$  tel que  $\sigma_1 \cap H_m = \sigma_2 \cap H_m = \tau$ . On obtient ainsi les inclusions

$$(8) \quad U_{\sigma_1} \supset (U_{\sigma_1})_{\chi^m} = U_\tau = (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}} \subset U_{\sigma_2}.$$

On considère maintenant la collection des variétés affines  $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$  où  $\sigma$  parcourt tous les cônes de  $\Sigma$ . Soit  $\sigma_1, \sigma_2$  deux tels cônes et  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ . Par (8), on a un isomorphisme

$$g_{\sigma_2, \sigma_1} : (U_{\sigma_1})_{\chi^m} \rightarrow (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}}$$

qui est l'identité sur  $U_\tau$ . Comme les conditions de compatibilité pour recoller les variétés affines  $U_\sigma$  le long des variétés  $(U_\sigma)_{\chi^m}$  sont vérifiées, on obtient une variété abstraite  $X$ . On note  $X_\Sigma$  cette variété pour signaler qu'elle vient de l'éventail  $\Sigma$ .

**THÉORÈME IV.1.5.** *Soit  $\Sigma$  un éventail de  $N_{\mathbb{R}}$ . La variété  $X_\Sigma$  est une variété torique normale et séparée.*

**REMARQUE IV.1.6.** On rappelle qu'une variété algébrique complexe est *séparé* si et seulement si elle est de Hausdorff pour sa topologie usuelle.

**DÉMONSTRATION.** Comme chaque cône de  $\Sigma$  est fortement convexe,  $\{0\} \subset N_{\mathbb{R}}$  est une face de tous les  $\sigma \in \Sigma$ . Donc  $T_N = \text{Spec}(\mathbb{C}[M]) \subset U_\sigma$  pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , c'est-à-dire  $T_N \subset X_\Sigma$ . On sait que  $T_N$  agit sur  $U_\sigma$ . Comme les isomorphismes  $g_{\sigma_2, \sigma_1}$  donnent l'identité sur  $\mathbb{C}[S_{\sigma_1 \cap \sigma_2}]$ , on conclut que l'action est compatible sur l'intersection de chaque paire d'ouverts du recouvrement de  $X_\Sigma$ . Cela donne une action algébrique de  $T_N$  sur  $X_\Sigma$ .

La variété  $X_\Sigma$  est irréductible car les ouverts  $U_\sigma$  sont des variétés affines toriques irréductibles contenant le tore  $T_N$ . Par le Théorème III.3.12, la variété affine  $U_\sigma$  est normale. En utilisant la Proposition I.2.11, on conclut que  $X_\Sigma$  est normale.

Pour montrer que  $X_\Sigma$  est séparé, il suffit de montrer que pour chaque paire de cônes  $\sigma_1, \sigma_2$ , l'image de l'application diagonale

$$\Delta : U_\tau \rightarrow U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2},$$

où  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ , est fermée. L'application  $\Delta$  vient de l'homomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbre

$$\begin{aligned} \Delta^* : \mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S_{\sigma_2}] &\rightarrow \mathbb{C}[S_\tau] \\ \chi^m \otimes \chi^n &\mapsto \chi^{m+n}. \end{aligned}$$

D'après la Proposition IV.1.3,  $\Delta^*$  est surjective, et

$$\mathbb{C}[S_\tau] \simeq (\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S_{\sigma_2}]) / \ker \Delta^*.$$

Donc l'image de  $\Delta$  est un fermé de Zariski de  $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$ . □

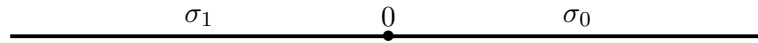
**REMARQUE IV.1.7.** La variété torique  $X_\Sigma$  est parfois notée  $X(\Sigma)$ . Si l'on veut préciser la dépendance au réseau  $N$ , on notera  $X_\Sigma$  par  $X_{\Sigma, N}$ .

**EXEMPLE IV.1.8.** Le Théorème IV.1.5 montre qu'une variété affine torique normale  $U_\sigma$  est égale à la variété torique  $X_\Sigma$  où  $\Sigma$  est l'éventail engendré par  $\sigma$  (c'est à dire  $\sigma$  et toutes ses faces).

**EXEMPLE IV.1.9.** On classifie toutes les variétés toriques normales et séparées de dimension 1. On peut supposer que  $N = \mathbb{Z}$  et  $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ . Les seuls cônes de  $N_{\mathbb{R}}$  sont  $\sigma_0 = [0; +\infty[$ ,  $\sigma_1 = ]-\infty; 0]$  et  $\tau = \{0\}$ . Ceci donne 4 éventails possible.

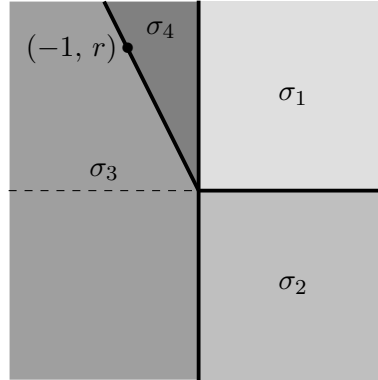
- (1) L'éventail  $\{\tau\}$  donne la variété  $\mathbb{C}^*$ ; en effet  $S_\tau = \mathbb{Z}$  et  $U_\tau = \text{Spec}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ .
- (2) Les éventails  $\{\sigma_0, \tau\}$  et  $\{\sigma_1, \tau\}$  donnent la variété  $\mathbb{C}$  car  $S_{\sigma_0} = \mathbb{N}$  et  $U_{\sigma_0} = \text{Spec}(\mathbb{C}[t])$ .
- (3) L'éventail  $\{\sigma_0, \sigma_1, \tau\}$  donne la variété  $\mathbb{CP}^1$ .

On représente ici l'éventail de  $\mathbb{CP}^1$  :



Voici des exemples de surfaces :

EXEMPLE IV.1.10. Soit  $r \in \mathbb{N}$  et  $\Sigma_r$  l'éventail de  $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$  formé des cônes  $\sigma_1 = \text{Cone}(e_1, e_2)$ ,  $\sigma_2 = \text{Cone}(e_1, -e_2)$ ,  $\sigma_3 = \text{Cone}(-e_2, re_2 - e_1)$  et  $\sigma_4 = \text{Cone}(e_2, re_2 - e_1)$ .



La variété torique  $X_{\Sigma_r}$  associée est recouverte par des ouvert affines

$$\begin{aligned} U_{\sigma_1} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]) \simeq \mathbb{C}^2 \\ U_{\sigma_2} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y^{-1}]) \simeq \mathbb{C}^2 \\ U_{\sigma_3} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-r}y^{-1}]) \simeq \mathbb{C}^2 \\ U_{\sigma_4} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, x^r y]) \simeq \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

La variété  $X_{\Sigma_r}$  est appelé *surface d'Hirzebruch*, on la notera  $\mathbb{F}_r$ .

Un fait remarquable est qu'en général, toute variété torique normale séparée provient d'un éventail. C'est une conséquence du théorème de Sumihiro, que l'on admettra.

THÉORÈME IV.1.11 (Sumihiro). *Soit  $T_N$  un tore agissant sur une variété normale séparée  $X$ . Alors tout point  $p \in X$  a un voisinage ouvert affine  $T_N$ -invariant.*

COROLLAIRE IV.1.12. *Soit  $X$  une variété torique normale et séparée qui a pour tore  $T_N$ . Alors il existe un éventail  $\Sigma$  de  $N_{\mathbb{R}}$  tel que  $X \simeq X_{\Sigma}$ .*

REMARQUE IV.1.13. Dans le reste de ce cours, on ne considère plus que des variétés normales et séparées. À partir de maintenant, par **variété torique** on entendra **variété torique normale et séparée**. En particulier, toutes les variétés toriques de la suite du cours sont définies par un éventail.

EXERCICE IV.1.14. Donner les éventails des variétés toriques  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{CP}^1$ ,  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ ,  $\mathbb{CP}^2$ .

On peut construire des exemples en dimension plus grande à l'aide de produits :

PROPOSITION IV.1.15. *Soit  $\Sigma_i \subset (N_i)_{\mathbb{R}}$  un éventail, pour  $i \in \{1, 2\}$ . Alors,*

$$\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{\sigma_1 \times \sigma_2 \mid \sigma_i \in \Sigma_i\}$$

*est un éventail dans  $(N_1 \times N_2)_{\mathbb{R}}$  et*

$$X_{\Sigma_1 \times \Sigma_2} \cong X_{\Sigma_1} \times X_{\Sigma_2}.$$



EXERCICE IV.1.16. Démontrer la Proposition IV.1.15.

On peut aussi construire des exemples singuliers.

**Devoir maison 3 : Étude d'un exemple, Exercice IV.1.17.**

EXERCICE IV.1.17. On considère l'espace projectif à poids  $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ . Cet espace est, par définition, le quotient de  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  par l'action de  $\mathbb{C}^*$  donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \\ (\lambda, (x, y, z)) &\mapsto (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z). \end{aligned}$$

- (1) Montrer que  $\mathbb{P}(1, 1, 2)$  est une variété torique.
- (2) On définit le réseau  $N$  comme le quotient de  $\mathbb{Z}^3$  par le sous-réseau  $\mathbb{Z} \cdot (1, 1, 2)$ . On pose  $u_i$  l'image de l'élément  $e_i$  de la base standard de  $\mathbb{Z}^3$  dans  $N$ , pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Montrer la relation  $u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$ .
- (3) Soit  $\Sigma$  l'éventail de  $N_{\mathbb{R}}$  formé par l'ensemble des cônes engendrés par les sous-ensembles de  $\{u_1, u_2, u_3\}$ . Montrer que  $X_{\Sigma} \simeq \mathbb{P}(1, 1, 2)$ .
- (4) Montrer que  $U_{\sigma_2} \simeq \mathbb{V}(xz - y^2)$ , et donc  $X_{\Sigma}$  est singulière.

On finit cette section par une description en termes d'éventails de la régularité et de la complétude des variétés toriques.

DÉFINITION IV.1.18. Soit  $\Sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un éventail. On dit que :

- (1)  $\Sigma$  est *lisse* (ou *régulier*) si tout cône  $\sigma$  de  $\Sigma$  est lisse.
- (2)  $\Sigma$  est *complet* si son support vérifie

$$|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = N_{\mathbb{R}}.$$

On a alors

THÉORÈME IV.1.19. Soit  $X_{\Sigma}$  la variété torique définie par l'éventail  $\Sigma$  de  $N_{\mathbb{R}}$ . Alors,

- (1)  $X_{\Sigma}$  est une variété lisse si et seulement si l'éventail  $\Sigma$  est lisse.
- (2)  $X_{\Sigma}$  est compacte au sens de la topologie classique si et seulement si  $\Sigma$  est complet.

DÉMONSTRATION. Le point (1) provient du Théorème III.3.19 car la régularité est une notion locale. Le point (2) sera démontré dans la Section 2.5.  $\square$

EXERCICE IV.1.20. Vérifier que les surfaces de Hirzebruch  $\mathbb{F}_r = X_{\Sigma_r}$  et  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  sont lisses.

REMARQUE IV.1.21. Un fait non trivial, démontré par Serre dans son article GAGA, est qu'une variété algébrique complexe  $X$  est compacte pour la topologie classique si et seulement si elle est *complète* pour la topologie de Zariski (c'est à dire que pour toute variété  $Z$ , la projection  $\pi_Z : X \times Z \rightarrow Z$  est fermée). Cette notion de complétude est la bonne notion qui remplace la compacité en géométrie algébrique, et le théorème IV.1.19 donne un critère de complétude pour une variété torique.

## 2. Correspondance orbites-cônes

On note  $T_N$  le tore d'une variété torique fixée  $X_{\Sigma}$ . Dans cette partie, on étudie les orbites de l'action de  $T_N$  sur  $X_{\Sigma}$ . On montrera dans le Théorème IV.2.5 qu'il existe une bijection entre les cônes de  $X_{\Sigma}$  et les  $T_N$ -orbites (i.e les orbites de l'action de  $T_N$  sur  $X_{\Sigma}$ ).

**2.1. Points et homomorphismes de semi-groupes.** Avant d'étudier les orbites de l'action, on rappelle quelques faits sur la description intrinsèque des points pour une variété torique. Dans la Proposition III.3.1, on a vu que les points de la variété affine  $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$  sont en bijection avec les homomorphismes de semi-groupes  $\gamma : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$  où  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ . Du Lemme III.2.8 et de la Proposition III.2.13 on déduit les faits suivants. Pour tout cône  $\sigma$ , on a un point  $\gamma_\sigma$  de  $U_\sigma$  défini par

$$\gamma_\sigma : m \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le point associé à  $\gamma_\sigma$  est appelé *point distingué* de  $\sigma$ . Par le Corollaire III.3.7, le point  $\gamma_\sigma$  est fixé sous l'action de  $T_N$  si et seulement si  $\dim \sigma = \dim N_{\mathbb{R}}$ . De plus, si  $\tau$  est une face de  $\sigma$ , alors  $\gamma_\tau \in U_\sigma$ . Les points distingués apparaissent comme limites de l'action du tore. Dans la proposition suivante, et ce qui suit, on identifie les points de  $T_N$  avec leur image dans  $X_\Sigma$  donnée par l'inclusion  $T_N \subset X_\Sigma$ .

PROPOSITION IV.2.1. *Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône et soit  $u \in N$ . Alors*

$$u \in \sigma \Leftrightarrow \exists \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) \in U_\sigma.$$

De plus, si  $u \in \text{Relint}(\sigma)$ , alors  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) = \gamma_\sigma$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $u \in N$  fixé. En utilisant un plongement de  $U_\sigma$  dans  $\mathbb{C}^s$  de la forme  $U_\sigma = Y_{\mathcal{A}}$  pour un système de générateurs  $\mathcal{A}$  de  $S_\sigma$ , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) \text{ existe dans } U_\sigma &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \chi^m(\lambda^u(t)) \text{ existe dans } \mathbb{C} \text{ pour tout } m \in S_\sigma \\ &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} t^{\langle m, u \rangle} \text{ existe dans } \mathbb{C} \text{ pour tout } m \in S_\sigma \\ &\Leftrightarrow \langle m, u \rangle \geq 0 \text{ pour tout } m \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M \\ &\Leftrightarrow u \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma. \end{aligned}$$

Ceci montre la première assertion.

Par ailleurs, si  $u \in \sigma \cap N$ , alors  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) \in U_\sigma$  est le point associé à l'homomorphisme de semi-groupe  $\gamma_u : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$  défini par

$$\gamma_u : m \in S_\sigma \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} t^{\langle m, u \rangle}.$$

Si  $u \in \text{Relint}(\sigma)$ , alors  $\langle m, u \rangle > 0$  pour tout  $m \in S_\sigma \setminus \sigma^\perp$  et  $\langle m, u \rangle = 0$  pour tout  $m \in S_\sigma \cap \sigma^\perp$ . En passant à la limite, on obtient le point  $\gamma_\sigma$ .  $\square$

EXERCICE IV.2.2. Illustrer la proposition précédente sur l'exemple

$$\mathbb{V}(xy - zw) = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^3]),$$

où  $\sigma^\vee := \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3)$ .

**2.2. Les orbites du tore.** On étudie maintenant les  $T_N$ -orbites sur  $X_\Sigma$ . Chaque cône  $\sigma \in \Sigma$  admet un point distingué  $\gamma_\sigma \in U_\sigma$ . Ceci donne une orbite du tore

$$O(\sigma) := T_N \cdot \gamma_\sigma \subset X_\Sigma.$$

Pour déterminer la structure de  $O(\sigma)$ , on commence par un lemme dont la preuve est laissée en exercice.

LEMME IV.2.3. *Soit  $\sigma$  un cône dans  $N_{\mathbb{R}}$ . Soit  $N_{\sigma}$  le sous réseau de  $N$  engendré par les points de  $\sigma \cap N$  et  $N(\sigma) = N/N_{\sigma}$ .*

(1) *L'appariement entre  $M$  et  $N$  induit un appariement non-dégénéré*

$$(9) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \sigma^{\perp} \cap M \times N(\sigma) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

(2) *La paire duale (9) induit un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*) \simeq T_{N(\sigma)},$$

où  $T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  est le tore associé à  $N(\sigma)$ .

Soit un point  $p \in U_{\sigma}$  représenté par l'homomorphisme de semi-groupe  $\gamma : S_{\sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $t \in T_N$ . On rappelle que le point  $t \cdot p$  est représenté par l'homomorphisme de semi-groupe

$$(10) \quad t \cdot \gamma : m \in S_{\sigma} \mapsto \chi^m(t) \gamma(m).$$

LEMME IV.2.4. *Soit  $\sigma$  un cône dans  $N_{\mathbb{R}}$ . Alors*

$$O(\sigma) = \{\gamma : S_{\sigma} \rightarrow \mathbb{C} \mid \gamma(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^{\perp} \cap M\} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*) \simeq T_{N(\sigma)}.$$

DÉMONSTRATION. L'ensemble  $O' = \{\gamma : S_{\sigma} \rightarrow \mathbb{C} \mid \gamma(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^{\perp} \cap M\}$  contient  $\gamma_{\sigma}$ . De plus  $O'$  est invariant sous l'action de  $T_N$  définie en (10). On en déduit que  $O(\sigma) \subset O'$ .

On remarque par ailleurs que  $\sigma^{\perp}$  est le plus grand sous espace vectoriel de  $M_{\mathbb{R}}$  à l'intérieur de  $\sigma^{\vee}$ . Donc  $S_{\sigma} \cap \sigma^{\perp}$  est un groupe contenu dans  $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ . Si  $\gamma \in O'$ , alors la restriction de  $\gamma$  à  $S_{\sigma} \cap \sigma^{\perp} = \sigma^{\perp} \cap M$  donne un homomorphisme de groupe  $\hat{\gamma} : \sigma^{\perp} \cap M \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

Inversement si  $\hat{\gamma} : \sigma^{\perp} \cap M \rightarrow \mathbb{C}^*$  est un homomorphisme de groupe, on obtient un homomorphisme de semi-groupe  $\gamma : S_{\sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  défini par

$$\gamma(m) = \begin{cases} \hat{\gamma}(m) & \text{si } m \in \sigma^{\perp} \cap M \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

On a donc  $O' \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*)$ .

En effectuant le produit tensoriel avec  $\mathbb{C}^*$  de la suite exacte

$$0 \longrightarrow N_{\sigma} \longrightarrow N \longrightarrow N(\sigma) \longrightarrow 0$$

on obtient une surjection

$$T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \rightarrow T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*).$$

Les bijections

$$T_{N(\sigma)} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*) \simeq O'$$

sont compatibles avec l'action de  $T_N$ . Donc  $T_N$  agit transitivement sur  $O'$ . Comme  $\gamma_{\sigma} \in O'$ , on conclut que  $O' = T_N \cdot \gamma_{\sigma} = O(\sigma)$ .  $\square$

**2.3. La correspondance.** Le théorème suivant caractérise en termes convexes les orbites du tore.

THÉORÈME IV.2.5 (Correspondance orbites-cônes). *Soit  $X_{\Sigma}$  la variété torique d'un éventail  $\Sigma$  dans  $N_{\mathbb{R}}$ . On a alors les propositions suivantes.*

(1) *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Cône } \sigma \in \Sigma\} & \rightarrow & \{T_N - \text{orbite de } X_{\Sigma}\} \\ \sigma & \mapsto & O(\sigma) \end{array}$$

*est une correspondance bijective.*

(2) Soit  $n = \dim N_{\mathbb{R}}$ . Pour chaque cône  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\dim O(\sigma) = n - \dim \sigma$ .

(3) L'ouvert affine  $U_{\sigma}$  est l'union d'orbites suivantes

$$U_{\sigma} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\tau).$$

(4) On a l'inclusion  $\tau \leq \sigma$  si et seulement si  $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}$ . De plus,

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\sigma)$$

où  $\overline{O(\tau)}$  est la fermeture à la fois dans la topologie de Zariski et la topologie classique.

DÉMONSTRATION. Point (1). À tout cône  $\sigma \in \Sigma$  est associé une  $T_N$ -orbite  $O(\sigma)$  telle que si  $\sigma \neq \sigma'$ ,  $O(\sigma) \neq O(\sigma')$ , d'après la description du Lemme IV.2.4. Soit  $O$  une  $T_N$ -orbite dans  $X_{\Sigma}$ . Comme  $U_{\sigma}$  est une variété torique ayant pour tore  $T_N$ , on déduit que  $X_{\Sigma}$  est recouvert par des ouvert  $T_N$ -invariants qui sont donc des réunions de  $T_N$ -orbites. De plus les ouverts  $U_{\sigma}$  vérifient  $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ . Donc il existe un cône minimal  $\sigma \in \Sigma$  tel que  $O \subset U_{\sigma}$ . On va montrer que  $O = O(\sigma)$ . Cela conclura la preuve du premier point.

Soit  $\gamma \in O$  et  $E_{\gamma} = \{m \in S_{\sigma} \mid \gamma(m) \neq 0\}$ . L'ensemble  $E_{\gamma}$  vérifie que si  $m, m' \in \sigma^{\vee} \cap M$  avec  $m + m' \in E_{\gamma}$ , alors  $m, m' \in E_{\gamma}$ . D'après le Lemme III.2.8 qui caractérise les faces de  $\sigma^{\vee}$ , on en déduit que  $E_{\gamma}$  est l'intersection d'une face de  $\sigma^{\vee}$  avec  $M$ . D'après la caractérisation des faces de  $\sigma^{\vee}$  (Proposition III.2.13), il existe une face  $\tau \leq \sigma$  tel que  $E_{\gamma} = \tau^{\perp} \cap S_{\sigma}$ . Ceci implique que  $\gamma \in U_{\tau}$  (i.e. le morphisme de semi-groupes associé à  $\gamma$  est la restriction d'un morphisme de semi-groupes défini sur  $S_{\tau}$ ). On a montré que  $O \subset U_{\tau}$ . Par minimalité de  $\sigma$ , nous avons  $\tau = \sigma$ . Ainsi,

$$\{m \in S_{\sigma} \mid \gamma(m) \neq 0\} = \sigma^{\perp} \cap M.$$

Par le Lemme IV.2.4,  $\gamma \in O(\sigma)$ . On a alors l'égalité  $O = O(\sigma)$  car deux orbites sont égales ou disjointes.

Point (2). Par le Lemme IV.2.3, on a  $\dim O(\sigma) = \dim T_{N(\sigma)} = \text{rang}(N) - \text{rang}(N_{\sigma})$ . Comme  $\text{rang}(N_{\sigma}) = \dim \sigma$  et  $\text{rang}(N) = n$ , on obtient  $\dim O(\sigma) = n - \dim \sigma$ .

Point (3). Si  $\tau \leq \sigma$  est une face, alors  $O(\tau) \subset U_{\tau} \subset U_{\sigma}$ . Donc  $O(\tau)$  est une orbite de  $U_{\sigma}$ . Comme  $U_{\sigma}$  est une union d'orbites, on conclut d'après le premier point que toute orbite de  $U_{\sigma}$  est de la forme  $O(\tau)$  avec  $\tau \leq \sigma$ .

Point (4). On commence avec la clôture de  $O(\tau)$  dans la topologie classique que l'on note  $\overline{O(\tau)}$ . Le fermé  $\overline{O(\tau)}$  est invariant sous l'action de  $T_N$ , donc est une union d'orbites.

On suppose que  $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}$ . Comme  $U_{\sigma}$  est ouvert pour la topologie classique, si  $O(\tau) \cap U_{\sigma} = \emptyset$ , alors  $\overline{O(\tau)} \cap U_{\sigma} = \emptyset$ . Ceci contredit  $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}$ . Donc  $O(\tau) \subset U_{\sigma}$ , par le troisième point, on conclut que  $\tau$  est une face de  $\sigma$ .

Réciproquement, on suppose que  $\tau$  est une face de  $\sigma$ . On va construire un point dans  $\overline{O(\tau)} \cap O(\sigma)$  de la forme  $\gamma_{\sigma} \cdot \gamma_{\tau}$ , où  $\gamma_{\tau}$  est le point distingué de  $U_{\tau}$ . Soit  $u \in \text{Relint}(\sigma)$ . Pour  $t \in \mathbb{C}^*$ , on définit  $\gamma(t) = \lambda^u(t) \cdot \gamma_{\tau}$ . Le morphisme associé à  $\gamma(t)$  est l'application

$$m \mapsto \chi^m(\lambda^u(t))\gamma_{\tau}(m) = t^{\langle m, u \rangle} \gamma_{\tau}(m).$$

Comme  $\gamma_{\tau} \in O(\tau)$ ,  $\gamma(t) \in O(\tau)$  pour tout  $t$ . On étudie maintenant la limite quand  $t \rightarrow 0$ , ce sera un point de  $\overline{O(\tau)}$ . Si  $m \in \sigma^{\vee} \setminus \sigma^{\perp}$ ,  $\langle m, u \rangle > 0$  et si  $m \in \sigma^{\perp}$ , on a  $\langle m, u \rangle = 0$ . Donc

$$\gamma(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)$$

existe en tant que point de  $U_\sigma$  et par la Proposition IV.2.1, il représente un point dans  $O(\sigma) = T_N \cdot \gamma_\sigma$ . Ainsi,  $\overline{O(\tau)} \cap O(\sigma) \neq \emptyset$ . Donc  $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}$ . L'égalité suivante est donc démontrée

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\sigma).$$

Il nous reste à montrer que  $\overline{O(\tau)}$  est aussi un fermé de Zariski. Si on effectue l'intersection de  $\overline{O(\tau)}$  avec  $U_{\sigma'}$ , nous avons d'après les points (3) et (4) que

$$\overline{O(\tau)} \cap U_{\sigma'} = \bigcup_{\tau \leq \sigma \leq \sigma'} O(\sigma).$$

Or, on peut démontrer que (cf exercice ci-dessous)

$$\bigcup_{\tau \leq \sigma \leq \sigma'} O(\sigma) = \mathbb{V}(I)$$

pour l'idéal  $I$  défini par

$$I = \langle \chi^m \mid m \in (\sigma')^\vee \cap M \setminus \tau^\perp \rangle \subset \mathbb{C}[S_{\sigma'}].$$

Cela montre que le fermé classique  $\overline{O(\tau)}$  est une sous-variété de  $X_\Sigma$ . Donc  $\overline{O(\tau)}$  est la fermeture de Zariski de  $O(\tau)$ .  $\square$

EXERCICE IV.2.6. Montrez l'assertion

$$\bigcup_{\tau \leq \sigma \leq \sigma'} O(\sigma) = \mathbb{V}(I)$$

pour l'idéal  $I$  défini par

$$I = \langle \chi^m \mid m \in (\sigma')^\vee \cap M \setminus \tau^\perp \rangle \subset \mathbb{C}[S_{\sigma'}].$$

(Notez tout d'abord que  $\mathbb{V}(I)$  est une union d'orbites de  $U_{\sigma'}$ . Puis utilisez le fait que pour  $\gamma_\sigma$  le point distingué de  $U_\sigma$ ,  $\chi^m(\gamma_\sigma) = \gamma_\sigma(m)$ , où dans le deuxième terme de l'égalité  $\gamma_\sigma$  est vu comme morphisme de semi-groupes).

EXERCICE IV.2.7. Caractériser les orbites de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  en termes de cônes d'un éventail.

**Fin du cinquième cours (09/02/2021)**

**2.4. Les variétés  $V(\tau)$ .** Avec les notations de la section précédente, on va voir que les fermetures des orbites sont également des variétés toriques. On note, pour  $\tau \in \Sigma$ ,

$$V(\tau) = \overline{O(\tau)}.$$

Le tore  $O(\tau) = T_{N(\tau)}$  est un ouvert de  $V(\tau)$ , où  $N(\tau)$  a été défini dans le Lemme IV.2.3. Pour chaque cône  $\sigma \in \Sigma$  contenant  $\tau$ , on note  $\bar{\sigma}$  l'image du cône  $\sigma$  par l'application quotient  $N_{\mathbb{R}} \rightarrow N(\tau)_{\mathbb{R}}$  venant de

$$0 \longrightarrow N_\tau \longrightarrow N \longrightarrow N(\tau) \longrightarrow 0.$$

On pose alors l'étoile de  $\tau$

$$\text{Star}(\tau) = \{\bar{\sigma} \subset N(\tau)_{\mathbb{R}} \mid \tau \leq \sigma \in \Sigma\}.$$

C'est un éventail dans  $N(\tau)_{\mathbb{R}}$ . Des points (1) et (4) du Théorème IV.2.5 on déduit :

PROPOSITION IV.2.8. *Pour tout  $\tau \in \Sigma$ , la fermeture de l'orbite  $V(\tau) = \overline{O(\tau)}$  est isomorphe à la variété torique  $X_{\text{Star}(\tau)}$ .*

EXERCICE IV.2.9. Décrire les variétés  $V(\tau)$  pour  $X_\Sigma = \mathbb{F}_r$ , la surface de Hirzebruch.

**2.5. Compacité.** On peut maintenant démontrer le point (2) du Théorème IV.1.19 :

THÉORÈME IV.2.10. *Soit  $X_\Sigma$  une variété torique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $X_\Sigma$  est compacte dans la topologie classique ;
- (2) Pour tout  $u \in N$ , la limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$  existe ;
- (3)  $\Sigma$  est complet.

DÉMONSTRATION. On sait que  $X_\Sigma$  est séparé et donc Hausdorff dans la topologie classique. Comme la topologie des affines  $U_\sigma$  est métrisable,  $X_\Sigma$  est compacte si et seulement si elle est séquentiellement compacte. On va montrer (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1).

Supposons alors que  $X_\Sigma$  est compacte. Soit  $u \in N$ . Pour toute suite  $(t_k) \in \mathbb{C}^*$  qui tend vers 0, on peut extraire par compacité une sous-suite de  $(\lambda^u(t_k))$  qui converge dans  $X_\Sigma$  vers un point  $\gamma$ . Comme  $X_\Sigma$  est recouverte par les ouverts affines  $U_\sigma$ , on peut fixer  $\sigma \in \Sigma$  tel que  $\gamma \in U_\sigma$ . Il s'agit de montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) = \gamma \in U_\sigma$ , c'est à dire, par la Proposition IV.2.1,  $u \in \sigma$ . Soit alors  $m \in \sigma^\vee \cap M$ . La fonction  $\chi^m$  est continue sur  $U_\sigma$  pour la topologie classique, et donc

$$\chi^m(\gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \chi^m(\lambda^u(t_k)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (t_k)^{\langle m, u \rangle}.$$

Comme cette limite existe, on en déduit que  $\langle m, u \rangle \geq 0$ , et donc  $u \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ . D'où (1)  $\Rightarrow$  (2).

On suppose maintenant que (2) est vraie. Soit  $u \in N$ . On a  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$  existe dans un certain  $U_\sigma$ , et donc par Proposition IV.2.1,  $u \in \sigma \cap N$ . On en déduit que

$$N = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \cap N,$$

et donc  $\Sigma$  est complet.

Montrons maintenant (3)  $\Rightarrow$  (1) par récurrence sur la dimension de  $X_\Sigma$ . Dans le cas  $n = 1$ , le seul éventail complet correspond à la variété  $\mathbb{C}P^1$  qui est homéomorphe à la sphère  $S^2$ , et donc compacte. Supposons alors que pour tout éventail complet d'un espace de dimension inférieure strictement à  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variété torique associée soit compacte. Soit  $\Sigma$  un éventail complet de  $N_\mathbb{R}$ , où  $N_\mathbb{R}$  est supposé de dimension  $n$ . Soit  $(\gamma_k) \in X_\Sigma$  une suite de points. On doit extraire une sous-suite convergente. Comme  $X_\Sigma$  est recouverte par un nombre fini d'orbites  $O(\tau)$ , on peut supposer sans perte de généralité que la suite  $(\gamma_k)$  est dans une orbite fixée  $O(\tau)$  pour un  $\tau \in \Sigma$ . Si  $\tau \neq \{0\}$ , alors  $\dim(\tau) \geq 1$  et la variété  $V(\tau) = \overline{O(\tau)}$  est de dimension inférieure ou égale à  $n - 1$ . On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure dans ce cas. Reste alors à traiter le cas où la suite est dans  $O(\{0\}) = T_N$ .

On introduit alors l'application logarithmique suivante :

$$\begin{aligned} L : T_N \simeq \text{Hom}_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*) &\rightarrow N_\mathbb{R} \simeq \text{Hom}_\mathbb{Z}(M, \mathbb{R}) \\ \gamma &\mapsto L(\gamma) : m \mapsto \log |\gamma(m)|. \end{aligned}$$

Cette application satisfait l'implication suivante, pour  $\sigma \in \Sigma$  :

$$L(\gamma) \in -\sigma \implies \forall m \in \sigma^\vee \cap M, |\gamma(m)| \leq 1.$$

On considère  $(L(\gamma_k)) \in N_\mathbb{R}$ . Comme  $N_\mathbb{R}$  est recouvert par les cônes  $\sigma \in \Sigma$  en nombre fini, il l'est par l'union des cônes  $-\sigma$ ,  $\sigma \in \Sigma$ , et donc on peut supposer sans perte de généralité qu'il

existe  $\sigma \in \Sigma$  tel que  $(L(\gamma_k)) \in -\sigma$ . Mais alors  $\forall m \in \sigma^\vee \cap M$ ,  $\forall k$ ,  $|\gamma_k(m)| \leq 1$ . On fixe alors un système fini de générateurs  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$  de  $S_\sigma$ . On a que pour tout  $j$ , et tout  $k$ ,  $|\gamma_k(m_j)| \leq 1$ . On peut donc extraire une sous suite, notée encore  $(\gamma_k)$ , telle que pour tout  $j$ ,  $\gamma_k(m_j)$  soit convergente. En utilisant un plongement de la variété  $U_\sigma = Y_{\mathcal{A}}$ , on voit que  $(\gamma_k)$  converge.  $\square$

### 3. Morphismes toriques

On va caractériser sur les éventails les morphismes toriques entre variétés toriques. Un tel morphisme doit être algébrique et préserver la structure du tore.

DÉFINITION IV.3.1. Une application  $\phi : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_2}$  entre deux variétés toriques est un *morphisme torique* si

- (1)  $\phi$  est un morphisme dans la catégorie des variétés algébriques ;
- (2) la restriction de  $\phi$  au tore  $T_{N_1} \subset X_{\Sigma_1}$  est un morphisme de groupes à valeurs dans le tore  $T_{N_2} \subset X_{\Sigma_2}$ .

REMARQUE IV.3.2. On rappelle qu'un morphisme  $\phi : X \rightarrow Y$  entre variétés algébriques est un morphisme d'espaces annelés. C'est à dire, dans notre situation, une application Zariski-continue telle que pour tout couple d'ouverts de Zariski  $U \subset X$  et  $V \subset Y$ , la restriction

$$\phi : U \cap \phi^{-1}(V) \rightarrow V$$

préserve les applications régulières ( $\forall f \in \mathcal{O}_Y(V)$ ,  $\phi^*(f) := f \circ \phi \in \mathcal{O}_X(U \cap \phi^{-1}(V))$ ). Un morphisme est donc une application continue "localement régulière".

Comme dans le cas affine, on peut démontrer que les morphismes dans la catégorie torique sont équivariants :

LEMME IV.3.3. Soit  $\phi : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_2}$  un morphisme torique. Alors  $\phi$  est équivariant pour l'action des tores, c'est à dire :

$$\forall (t, x) \in T_{N_1} \times X_{\Sigma_1}, \phi(t \cdot x) = \phi(t) \cdot \phi(x).$$

**3.1.  $\Sigma$ -Compatibilité.** La traduction sur les éventails d'un morphisme torique suit naturellement le cas affine vu en Section 3.4 du Chapitre III.

DÉFINITION IV.3.4. Soient  $N_1, N_2$  deux réseaux et  $\Sigma_i$  un éventail de  $(N_i)_{\mathbb{R}}$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ . Un morphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules  $\bar{\phi} : N_1 \rightarrow N_2$  est *compatible* avec les éventails  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  si pour tout cône  $\sigma_1 \in \Sigma_1$ , il existe un cône  $\sigma_2 \in \Sigma_2$  tel que  $\bar{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$ .

On a alors l'équivalence des deux notions de morphismes :

THÉORÈME IV.3.5. Soient  $N_1, N_2$  deux réseaux et  $\Sigma_i$  un éventail de  $(N_i)_{\mathbb{R}}$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ .

- (1) Si  $\bar{\phi} : N_1 \rightarrow N_2$  est un morphisme de réseaux compatible avec  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , alors il y a un morphisme torique  $\phi : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_2}$  tel que la restriction au tore  $\phi|_{T_{N_1}}$  soit l'application

$$\bar{\phi} \otimes 1 : N_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \rightarrow N_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*.$$

- (2) Réciproquement, si  $\phi : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_2}$  est un morphisme torique,  $\phi$  induit un morphisme de réseaux  $\bar{\phi} : N_1 \rightarrow N_2$  compatible avec  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

DÉMONSTRATION. Preuve de (1). Soit  $\sigma_1 \in \Sigma_1$  et  $\sigma_2 \in \Sigma_2$  tel que  $\overline{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$ . D'après la Proposition III.3.23, le morphisme  $\overline{\phi} \otimes 1$  s'étend en un morphisme torique  $\phi_{\sigma_1} : U_{\sigma_1} \rightarrow U_{\sigma_2} \subset X_{\Sigma_2}$ . Les morphismes  $\{\phi_{\sigma_1} \mid \sigma_1 \in \Sigma_1\}$  se recollent en un morphisme torique  $\phi : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_2}$ . En effet, si  $\sigma_1, \sigma'_1 \in \Sigma_1$  et  $\sigma_2, \sigma'_2 \in \Sigma_2$  sont tels que  $\overline{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$  et  $\overline{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma'_1) \subset \sigma'_2$ , on a  $\overline{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1 \cap \sigma'_1) \subset \overline{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \cap \overline{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma'_1) \subset \sigma_2 \cap \sigma'_2$ . On en déduit que les restrictions de  $\phi_{\sigma_1}$  et  $\phi_{\sigma'_1}$  à  $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma'_1} = U_{\sigma_1 \cap \sigma'_1}$  sont égales à  $\phi_{\sigma_1 \cap \sigma'_1}$ . Ceci suffit pour assurer le recollement et définir  $\phi : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_2}$ .

Preuve de (2). La restriction de  $\phi$  à  $T_{N_1}$  est un morphisme de groupes, et pour tout  $u \in N_1$ , la composition  $\phi \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow T_{N_2}$  est un sous groupe à un paramètre  $\lambda^{\overline{\phi}(u)}$  de  $T_{N_2}$ . Comme  $\phi|_{T_{N_1}}$  est un morphisme de groupe, l'application  $u \in N_1 \mapsto \overline{\phi}(u) \in N_2$  est un morphisme de réseau. Il s'agit donc essentiellement de montrer que  $\overline{\phi}$  est compatible avec les éventails. Soit  $\sigma_1 \in \Sigma_1$ . On va utiliser la correspondance orbites-cônes pour trouver  $\sigma_2 \in \Sigma_2$  tel que  $\overline{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$ . On a, par équivariance de  $\phi$ ,  $\phi(O(\sigma_1)) = \phi(T_{N_1} \cdot \gamma_{\sigma_1}) \subset T_{N_2} \cdot \phi(\gamma_{\sigma_1})$ , où  $T_{N_2} \cdot \phi(\gamma_{\sigma_1})$  est une orbite. Il existe donc  $\sigma_2 \in \Sigma_2$  telle que

$$\phi(O(\sigma_1)) \subset O(\sigma_2).$$

On va montrer que

$$(11) \quad \phi(U_{\sigma_1}) \subset U_{\sigma_2}.$$

On rappelle que

$$U_{\sigma_i} = \bigcup_{\tau_i \leq \sigma_i} O(\tau_i).$$

Soit alors  $\tau_1 \leq \sigma_1$ . En raisonnant comme pour  $\sigma_1$ , on sait qu'il existe  $\tau_2 \in \Sigma_2$  tel que

$$\phi(O(\tau_1)) \subset O(\tau_2).$$

De plus,  $\phi$  est continue et donc  $O(\sigma_1) \subset \overline{O(\tau_1)}$  implique

$$\phi(O(\sigma_1)) \subset \phi(\overline{O(\tau_1)}) \subset \overline{O(\tau_2)}.$$

On a alors l'inclusion de l'orbite contenant  $\phi(O(\sigma_1))$  :

$$O(\sigma_2) \subset \overline{O(\tau_2)},$$

ce qui implique en retour que  $\tau_2 \leq \sigma_2$ , et donc l'inclusion (11) est vérifiée. Mais alors  $\phi$  induit un morphisme torique de  $U_{\sigma_1}$  vers  $U_{\sigma_2}$ , et donc par la Proposition III.3.23 on a la compatibilité

$$\overline{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2.$$

□

EXERCICE IV.3.6. Déterminer des exemples de morphismes toriques  $\mathbb{F}_r \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . On peut démontrer que  $\mathbb{F}_r$  admet une structure de *fibration torique* sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

EXEMPLE IV.3.7. Pour tout éventail  $\Sigma$  de  $N_{\mathbb{R}}$  et tout  $a \in \mathbb{N}^*$ , l'application

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_a : N &\rightarrow N \\ u &\mapsto a u \end{aligned}$$

est compatible avec  $\Sigma$ . On en déduit un morphisme torique  $\phi_a : X_{\Sigma} \rightarrow X_{\Sigma}$  dont la restriction au tore  $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$  est donnée par  $\phi_a(t_1, \dots, t_n) = (t_1^a, \dots, t_n^a)$ .



**3.2. Blow-ups.** On présente une classe de morphismes toriques très utile dans la classification des variétés algébriques, *les éclatements* (ou blow-ups en anglais).

REMARQUE IV.3.8. On se restreindra aux éclatements de points, mais cette procédure peut être étendue à l'éclatement de sous-variétés.

On commence par un exemple en dimension 2 :

EXEMPLE IV.3.9. Soient  $V_0 = \mathbb{C}^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}[u, v])$  et  $V_1 = \mathbb{C}^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}[w, z])$  deux copies de  $\mathbb{C}^2$ . On considère les ouverts affines :

$$V_{10} := V_0 \setminus \mathbb{V}(v) = \text{Spec}(\mathbb{C}[u, v]_v)$$

et

$$V_{01} := V_1 \setminus \mathbb{V}(z) = \text{Spec}(\mathbb{C}[w, z]_z)$$

que l'on va recoller via les morphismes

$$\begin{aligned} g_{10}^* : \mathbb{C}[w, z]_z &\rightarrow \mathbb{C}[u, v]_v \\ w &\mapsto uv \\ z &\rightarrow \frac{1}{v} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_{01}^* : \mathbb{C}[u, v]_v &\rightarrow \mathbb{C}[w, z]_z \\ u &\mapsto wz \\ v &\rightarrow \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Comme  $g_{01}^{-1} = g_{10}$ , on peut recoller  $V_0$  à  $V_1$  le long des ouverts affines  $V_{10} \simeq V_{01}$ . On note  $V$  la variété obtenue. On va montrer que  $V \simeq \text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)$ , l'éclatement de  $\mathbb{C}^2$  à l'origine, donnée par

$$\text{Bl}_0(\mathbb{C}^2) := \mathbb{V}(x_0y - x_1x) \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2,$$

où les variables  $[x_0, x_1]$  sont les variables homogènes de  $\mathbb{CP}^1$  et  $(x, y)$  sont les variables de  $\mathbb{C}^2$ . Pour cela on va identifier un recollement qui permet d'obtenir  $W := \text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)$ . La variété  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$  est recouverte par

$$U_0 \times \mathbb{C}^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, x, y])$$

et

$$U_1 \times \mathbb{C}^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}[\frac{x_0}{x_1}, x, y]).$$

On en déduit que  $W$  est recouverte par les affines

$$W_0 = W \cap U_0 \times \mathbb{C}^2 = \mathbb{V}(y - (\frac{x_1}{x_0})x) \subset U_0 \times \mathbb{C}^2$$

et

$$W_1 = W \cap U_1 \times \mathbb{C}^2 = \mathbb{V}(x - (\frac{x_0}{x_1})y) \subset U_1 \times \mathbb{C}^2,$$

dont les anneaux de coordonnées sont respectivement

$$\mathbb{C}[W_0] = \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, x, y]/(y - (\frac{x_1}{x_0})x) \simeq \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, x]$$

et

$$\mathbb{C}[W_1] \simeq \mathbb{C}[\frac{x_0}{x_1}, y].$$

La variété  $W$  est alors obtenue par le recollement de  $W_0$  et  $W_1$  le long de  $W_0 \setminus \mathbb{V}(\frac{x_1}{x_0}) \simeq W_1 \setminus \mathbb{V}(\frac{x_0}{x_1})$  via l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, x]_{\frac{x_1}{x_0}} & \rightarrow & \mathbb{C}[\frac{x_0}{x_1}, y]_{\frac{x_0}{x_1}} \\ \frac{x_1}{x_0} & \mapsto & \frac{x_1}{x_0} = (\frac{x_0}{x_1})^{-1} \\ x & \mapsto & x = \frac{x_0}{x_1} y. \end{array}$$

On voit que les morphismes de recollement sont les mêmes que pour  $V$  et que  $V \simeq W$ .

On passe maintenant à la description du morphisme d'éclatement

$$\pi : \text{Bl}_0(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2.$$

La projection sur le deuxième facteur  $\pi_2 : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  induit une projection  $\pi : W \rightarrow \mathbb{C}^2$  par restriction à  $W$ . Dans la carte locale  $W_0$ , de coordonnées  $(x, \frac{x_1}{x_0})$ , la projection se lit  $(x, \frac{x_1}{x_0}) \mapsto (x, y = x \frac{x_1}{x_0})$ , et est induite par le morphisme

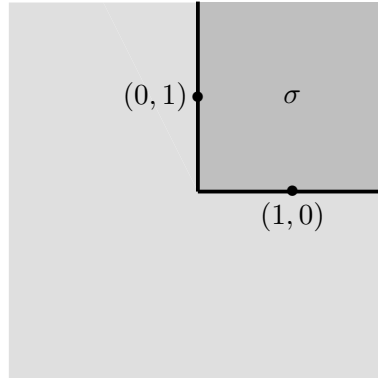
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathbb{C}^2] = \mathbb{C}[x, y] & \rightarrow & \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, x] \simeq \mathbb{C}[W_0] \\ x & \mapsto & x \\ y & \mapsto & x \frac{x_1}{x_0}. \end{array}$$

On obtient de même une expression de  $\pi$  sur  $W_1$ . Les propriétés fondamentales de ce morphisme sont les suivantes :

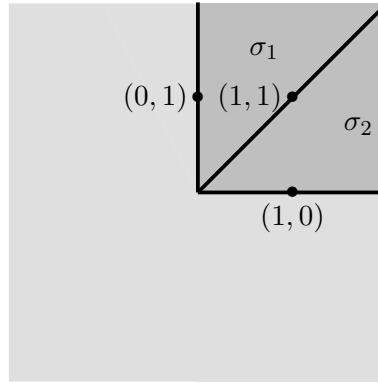
- (i) l'image réciproque  $E := \pi^{-1}(0)$  (appelée diviseur exceptionnel) est isomorphe à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  ;
- (ii) La restriction  $\pi : W \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  est un isomorphisme.

La preuve de ces faits suit facilement de la description locale de  $\pi$  pour le point (ii) et de la définition de  $W \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$  pour le point (i). Ces résultats expliquent la terminologie : on a "éclaté" l'origine de  $\mathbb{C}^2$  pour la remplacer par l'ensemble de toutes les directions en l'origine, c'est à dire  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

On va maintenant donner une description purement torique du morphisme d'éclatement. Soient les deux éventails suivants de  $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ , avec  $N = \mathbb{Z}^2$  :  $\Sigma$  est l'éventail de  $\mathbb{C}^2$ , dont les cônes sont donnés par  $\sigma$  et l'ensemble des ses faces :



L'éventail  $\Sigma'$  est lui donné par  $\sigma_1, \sigma_2$  et l'ensemble de leurs faces :



On laisse en exercice le soin de vérifier que  $X_\Sigma \simeq \mathbb{C}^2$  et que  $X_{\Sigma'} \simeq \text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)$ . De plus, le morphisme identité  $\text{Id} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  est compatible avec  $\Sigma'$  et  $\Sigma$  (tous les cônes de  $\Sigma'$  sont envoyés dans  $\sigma$ ). On a alors un morphisme torique induit  $\phi : X_{\Sigma'} \rightarrow X_\Sigma$ . On peut reconnaître le morphisme d'éclatement décrit ci-dessus en travaillant dans les cartes affines. En effet, la restriction  $\phi : U_{\sigma_1} \rightarrow U_\sigma$  est induite par l'identité sur le tore, et correspond donc au morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[U_\sigma] = \mathbb{C}[x, y] & \rightarrow & \mathbb{C}[x, x^{-1}y] \simeq \mathbb{C}[U_{\sigma_1}] \\ x & \mapsto & x \\ y & \mapsto & y = x(x^{-1}y). \end{array}$$

On peut généraliser cet exemple en dimension supérieure :

EXERCICE IV.3.10. On définit l'éclatement de  $\mathbb{C}^n$  à l'origine, noté  $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^n)$ , comme étant la sous-variété  $W$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{C}^n$  définie par les équations suivantes :

$$W = \text{Bl}_0(\mathbb{C}^n) = \mathbb{V}(x_{i-1}y_j - x_{j-1}y_i \mid 1 \leq i < j \leq n) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{C}^n,$$

où les  $[x_0, \dots, x_{n-1}]$  sont les coordonnées homogènes de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  et les  $(y_j)$  les coordonnées de  $\mathbb{C}^n$ . On pose, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$U_{i-1} := \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \setminus \mathbb{V}(x_{i-1})$$

et

$$W_{i-1} := W \cap (U_{i-1} \times \mathbb{C}^n).$$

(1) Montrer que pour tout  $i$  on a

$$\mathbb{C}[W_{i-1}] \simeq \mathbb{C}\left[\frac{x_0}{x_{i-1}}, \dots, \frac{x_{i-2}}{x_{i-1}}, \frac{x_i}{x_{i-1}}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_{i-1}}, y_i\right].$$

(2) Identifier les isomorphismes qui permettent de recoller les ouverts  $W_{i-1} \setminus \mathbb{V}(x_{j-1})$  et  $W_{j-1} \setminus \mathbb{V}(x_{i-1})$  pour obtenir  $W$ .

(3) Montrer que la projection  $\pi_2 : \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  induit un morphisme  $\pi : W \rightarrow \mathbb{C}^n$  qui vérifie :

- (i) l'image réciproque  $\pi^{-1}(0) = E$  est isomorphe à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  ;
- (ii) La restriction  $\pi : W \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  est un isomorphisme.

(4) Donner une description en termes d'éventails du morphisme torique  $\pi$ .

On passe maintenant à la description générale de la procédure d'éclatement.

DÉFINITION IV.3.11. Soit  $\Sigma$  un éventail de  $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ . Soit  $\sigma = \text{Cone}(u_1, \dots, u_n) \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône lisse de  $\Sigma$ , tel que  $\{u_1, \dots, u_n\}$  soit une base de  $N$ . On pose  $u_0 := u_1 + \dots + u_n$  et on définit  $\Sigma'(\sigma)$  comme étant l'ensemble des cônes engendrés par les sous-ensembles de  $\{u_0, \dots, u_n\}$  qui ne contiennent pas  $\{u_1, \dots, u_n\}$ . On définit la *subdivision étoilée* de  $\Sigma$  le long de  $\sigma$  comme étant l'éventail

$$\Sigma^*(\sigma) := (\Sigma \setminus \{\sigma\}) \cup \Sigma'(\sigma).$$

EXERCICE IV.3.12. Résoudre les questions suivantes :

- (1) Vérifier que  $\Sigma^*(\sigma)$  est bien un éventail de  $N_{\mathbb{R}}$ .
- (2) On considère dans  $\mathbb{R}^3$  l'éventail  $\Sigma$  défini par  $\text{Cone}(e_1, e_2, e_3)$  et l'ensemble de ses faces. Décrivez  $\Sigma^*(\sigma)$ .
- (3) Faire un dessin.

La subdivision étoilée correspond à l'éclatement le long du point distingué  $\gamma_\sigma$  :

PROPOSITION IV.3.13. Soient  $\Sigma$  un éventail de  $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  et  $\sigma = \text{Cone}(u_1, \dots, u_n) \in \Sigma$  un cône lisse tel que  $\{u_1, \dots, u_n\}$  soit une base de  $N$ . Alors le morphisme identité  $\text{Id} : N \rightarrow N$  est compatible avec  $\Sigma^*(\sigma)$  et  $\Sigma$ . De plus, le morphisme torique induit

$$\phi_{\text{Id}} : X_{\Sigma^*(\sigma)} \rightarrow X_{\Sigma}$$

est l'éclatement de  $X_{\Sigma}$  au point distingué  $\gamma_\sigma$ .

DÉMONSTRATION. Par construction de la subdivision étoilée, il est clair que tout cône de  $\Sigma^*(\sigma)$  est inclus dans un cône de  $\Sigma$ . On a donc un morphisme torique induit

$$\phi_{\text{Id}} : X_{\Sigma^*(\sigma)} \rightarrow X_{\Sigma}.$$

Comme  $\Sigma$  et  $\Sigma^*(\sigma)$  sont identiques pour les cônes en dehors du support de  $\sigma$ , on peut se restreindre au cas où  $\Sigma$  est l'éventail constitué de  $\sigma$  et toutes ses faces. Dans ce cas,  $X_{\Sigma} = U_\sigma \simeq \mathbb{C}^n$  car  $\sigma$  est lisse, de dimension  $n$  et strictement convexe. On sait également que le point distingué  $\gamma_\sigma$  est l'unique point fixe sous l'action de  $T_N$ , et correspond à l'origine dans l'isomorphisme  $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^n$ . On laisse alors en exercice de vérifier que dans cette description locale, le morphisme

$$\phi_{\text{Id}} : X_{\Sigma^*(\sigma)} \rightarrow U_\sigma$$

correspond à l'éclatement de  $\mathbb{C}^n$  en l'origine décrit dans l'exercice IV.3.10.  $\square$

Fin du sixième cours (16/02/2021)

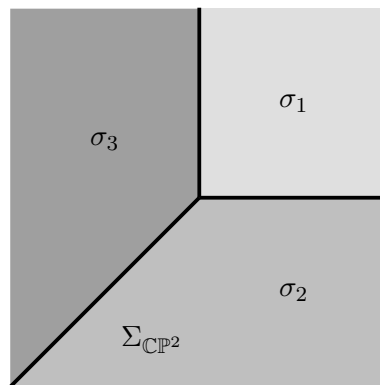
## Surfaces toriques

Dans ce dernier chapitre, on spécialise les constructions des Chapitres III et IV au cas de la dimension 2. On dénote  $N$  un réseau de rang 2,  $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$  son réseau dual,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'appariement entre  $M$  et  $N$ , et  $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  le tore complexe associé. En pratique, on supposera  $N = \mathbb{Z}^2$ , ce qui est toujours possible après un choix de  $\mathbb{Z}$ -base.

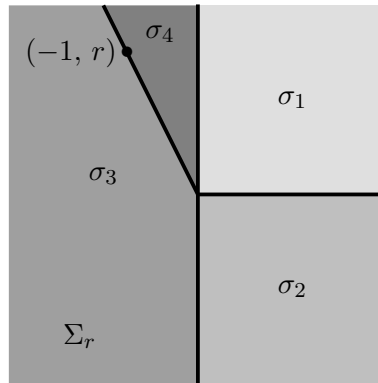
La description en termes d'éventails de  $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$  des surfaces toriques est très simple. Elle va nous permettre dans la Section 1 d'obtenir une classification de toutes les surfaces toriques lisses complètes (i.e. compactes). Le procédé d'éclatement décrit dans la Section 3.2 du Chapitre IV est l'outil principal pour obtenir ce résultat.

### 1. Classification des surfaces toriques complètes lisses

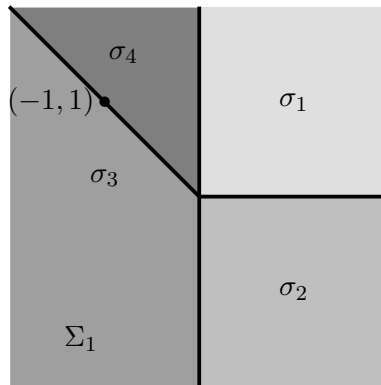
On a déjà vu dans le Chapitre IV (Exemple IV.1.10 et Exercice IV.1.14) des exemples de surfaces toriques lisses :  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  et les surfaces de Hirzebruch  $\mathbb{F}_r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . On rappelle les éventails de ces surfaces. L'éventail de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  dans  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  est donné par :



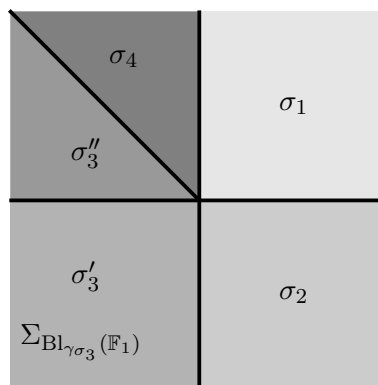
et celui de la  $r$ -ème surface de Hirzebruch  $\mathbb{F}_r$  est donné par la figure suivante (le réseau sous-jacent est  $\mathbb{Z}^2$ ) :



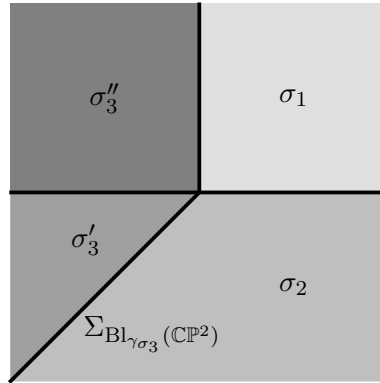
À l'aide d'éclatements vus en Proposition IV.3.13, on peut construire d'autres exemples. Ainsi, l'éventail de  $\mathbb{F}_1$  est



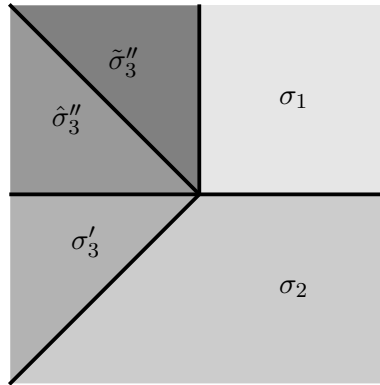
et l'éclatement  $\text{Bl}_{\gamma_{\sigma_3}}(\mathbb{F}_1)$  de  $\mathbb{F}_1$  au point  $\gamma_{\sigma_3}$  est donné par l'éventail suivant :



De même, l'éclatement  $\text{Bl}_{\gamma_{\sigma_3}}(\mathbb{CP}^2)$  de  $\mathbb{CP}^2$  au point  $\gamma_{\sigma_3}$  est donné par l'éventail suivant :



On peut alors itérer le procédé d'éclatement et obtenir de nombreux exemples de surfaces toriques lisses complètes. Par exemple, on obtient un éclatement itéré de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  en éclatant  $\text{Bl}_{\gamma_{\sigma_3}}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$  au point  $\gamma_{\sigma_3''}$ , ce qui donne la surface torique dont l'éventail est figuré ci-dessous :



En fait, toute surface torique lisse et complète est obtenue de cette manière :

**THÉORÈME V.1.1.** *Toute surface torique lisse complète est obtenue à partir d'une succession d'éclatements de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  ou bien d'une surface de Hirzebruch  $\mathbb{F}_r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ .*

**REMARQUE V.1.2.** Une même surface torique lisse peut être obtenue à partir d'une succession d'éclatements de différentes surfaces. Par exemple, l'éclatement  $\text{Bl}_{\gamma_{\sigma_3}}(\mathbb{F}_1)$  est également l'éclatement de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  en un point bien choisi.

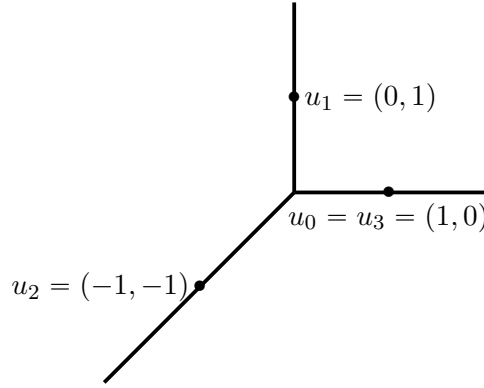
L'objectif de cette section est de démontrer le Théorème V.1.1. Soit  $X_\Sigma$  une surface torique complète lisse, d'éventail  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Comme elle est complète, on sait que le support de  $\Sigma$  est  $\mathbb{R}^2$ , et on a donc :

**LEMME V.1.3.** *L'éventail  $\Sigma$  est entièrement déterminé par l'ensemble*

$$\Sigma^1 := \{u_\rho \mid \rho \in \Sigma, \dim(\rho) = 1\}$$

*des générateurs primitifs des cônes de dimension 1 (ou rayons) de  $\Sigma$ .*

On dénote par  $u_0, u_1, \dots, u_d = u_0$  les générateurs primitifs des rayons de  $\Sigma$ , ordonnés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Par exemple, pour  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  on a le schéma suivant :



La relation suivante entre les  $u_i$  sera utilisée dans la preuve du Théorème V.1.1.

LEMME V.1.4. *Toute paire successive  $\{u_i, u_{i+1}\}$  est une  $\mathbb{Z}$ -base du réseau  $\mathbb{Z}^2$ . On en déduit que pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , il existe  $a_i \in \mathbb{Z}$  tel que*

$$(12) \quad a_i u_i = u_{i-1} + u_{i+1}.$$

De plus, on a une contrainte topologique sur la position relative des  $u_i$  :

LEMME V.1.5. *Soient  $u_j$  et  $u_i$  des éléments distincts de  $\Sigma^1$ . Alors, on ne peut pas avoir simultanément*

$$u_j \in (\mathbb{R}_+^* \cdot u_{i+1} + \mathbb{R}_+^* \cdot (-u_i))$$

et

$$u_{j+1} \in (\mathbb{R}_+^* \cdot (-u_i) + \mathbb{R}_+^* \cdot (-u_{i+1})).$$

DÉMONSTRATION. Indication : écrire  $u_j$  et  $u_{j+1}$  dans la base donnée par  $\{u_i, u_{i+1}\}$ .  $\square$

On a maintenant tous les ingrédients pour démontrer le Théorème V.1.1.

PREUVE DU THÉORÈME V.1.1. On rappelle que  $d$  est le nombre de rayons de  $\Sigma$ . La preuve repose alors sur les faits suivants :

- (1) Si  $d = 3$ , alors  $X_\Sigma \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .
- (2) Si  $d = 4$ , alors il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $X_\Sigma \simeq \mathbb{F}_r$ .
- (3) Si  $d \geq 5$ , il existe  $j \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $u_j = u_{j-1} + u_{j+1}$ . Pour démontrer ce fait, on donne les indications suivantes :
  - (i) Montrer que pour  $d \geq 4$ , il existe deux vecteurs opposés dans  $\Sigma^1$  (on pourra considérer la plus grande suite de vecteurs consécutifs contenue dans un demi-plan de  $\mathbb{R}^2$  et la contrainte topologique du Lemme V.1.5).
  - (ii) On suppose  $u_i = -u_0$ , avec  $i \geq 3$ . On peut écrire  $u_j = -b_j u_0 + b'_j u_1$  pour tout  $0 < j \leq i$ , avec  $b_j, b'_j \in \mathbb{N}^2$ . On pose  $c_j = b_j + b'_j$ . Alors  $c_2 \geq 2$ ,  $c_i = 1$ , et donc il existe  $j_0$  avec  $c_{j_0} > c_{j_0+1}$  et  $c_{j_0} \geq c_{j_0-1}$ .
  - (iii) Conclure que  $u_{j_0} = u_{j_0-1} + u_{j_0+1}$ .

$\square$

**Devoir maison 4 : classification des surfaces toriques lisses.** Démontrer, en donnant les détails laissés au lecteur, les Lemmes V.1.4 et V.1.5. Conclure la preuve du Théorème V.1.1.



## Bibliographie

- [CLO] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA, *Ideals, Varieties and Algoritheorems*, third edition, Undergraduate Texts in Math., Springer, New York, 2007.
- [CLS] David COX, John LITTLE, Hal SCHENCK, *Toric varieties*, AMS Graduate Studies in Mathematics volume : 124 ; 2011
- [Ful] William FULTON, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1993.
- [Oda] Tadao ODA, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1988.