Université de Brest
Licence 3: PMRC Analyse
Année 2019-2020

Feuille TD 6 – Transformée de Fourier

Exercice 1
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que f est à valeurs réelles. Montrer que

1. Si f est paire, alors $\hat{f}$ est à valeur réelles et
$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} f(t)\ \cos(2\pi\xi t)\, dt.$$

2. Si f est impaire, alors $\hat{f}$ est imaginaire pure et
$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = -2i \int_0^{+\infty} f(t)\ \sin(2\pi\xi t)\, dt.$$

Exercice 2
Calculer la transformée de Fourier de la fonction plateau f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$
Montrer que la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$
est donnée par
$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = \frac{(\sin(\pi\xi))^2}{(\pi\xi)^2}.$$

Exercice 3
Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction g_a définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = e^{-a|x|}.$$

Exercice 4
Soit $\alpha > 0$. On pose
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{-\alpha t^2}.$$

1. Montrer que f vérifie l'équation différentielle
$$f'(t) = -2\alpha t f(t). \tag{1}$$

2. Montrer que l'on peut appliquer l'opérateur transformée de Fourier à l'équation (1).

3. En déduire une équation différentielle vérifiée par $\mathcal{F}(f)$.

4. En déduire
$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\pi}{\alpha}\xi^2}.$$
(On rappelle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$).

Exercice 5
Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_\sigma \in \mathcal{L}^1$ par
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

1. Calculer $\mathcal{F}(f_\sigma)$ (on pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent).

2. Montrer que pour tout $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$f_{\sigma_1} * f_{\sigma_2} = f_{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}.$$

Exercice 6
On va montrer que les fonctions $\mathcal{C}^2$ à support compact satisfont les hypothèses des théorèmes d'inversion et de Plancherel énoncés dans le cours. Soit alors f une telle fonction.

1. Rappeler pourquoi la fonction f est intégrable et continue.

2. Parmis les hypothèses sur f quelle est celle qui permet d'assurer la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\cdot + n)|$ sur tout interval compact?

3. Démontrer la formule
$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = -\frac{1}{4\pi\xi^2}\hat{f}''(\xi).$$

4. En déduire la convergence normale de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\cdot + n)|$ sur tout interval compact.

Exercice 7
Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation
$$f * f = f. \tag{2}$$
(On admettra le lemme de Riemann-Lebesgue: pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\displaystyle\lim_{|\xi|\to+\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.)

Exercice 8
Montrer que la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si} \quad x \in [0,1] \end{cases}$$
est donnée par
$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = \frac{(\sin(\pi\xi))^2}{(\pi\xi)^2}.$$
En déduire la valeur de
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 t}{t^4}\, dt.$$