Université de Brest
Licence 3: PMRC Analyse
Année 2019-2020

Feuille TD 5 – Series de Fourier

Exercice 1
Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}_m^0(S^1)$. Montrer que $f * g$ est une fonction 2π-périodique et que $f * g = g * f$. Montrer que si f est continue, $f * g$ est continue.

Remarque: En réalité, si f et g sont seulement supposées intégrables au sens de Riemann, on a encore $f * g$ continue.

Exercice 2
Soient f et g les fonctions de $\mathcal{C}_m^0(S^1)$ définies par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi[$ et $g(x) = |x|$ sur $[0, 2\pi[$.

1. Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f' et g'.
3. Comparer ces coefficients à $in\, c_n(f)$ et $in\, c_n(g)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3
Soit f la fonction de $\mathcal{C}_m^0(S^1)$ définie par $f(x) = x$ sur $[0, 2\pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. À l'aide de la formule de Parseval, en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4
Soit g la fonction de $\mathcal{C}_m^0(S^1)$ définie par $g(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de g.
2. À l'aide de la formule de Parseval, en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 5
On note D_N le noyau de Dirichlet.

1. Montrer, sans calcul, que
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1.$$
2. Soit $t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que
$$D_N(t) = 2N + 1.$$
3. Soit $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que
$$D_N(t) = \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Exercice 6

Soit f la fonction de $\mathcal{C}^0_m(S^1)$ définie par $f(x) = x$ sur $]-\pi,\pi]$.

1. Montrer que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa somme en tout point de $]-\pi,\pi]$.

2. En déduire un calcul explicite de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nt)}{n}$ pour tout $t \in]0,2\pi]$.