Université de Brest
Licence 3: PMRC Analyse
Année 201-2020

Feuille TD 4 – Bases hilbertiennes

Exercice 1
Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien. Montrer que les applications $|| \cdot ||$ sur H et $< \cdot, \cdot >$ sur $H \times H$ sont continues.

Exercice 2
Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien de dimension finie. Démontrer les égalités de Plancherel et Parseval dans ce cas, et étudier les assertions réciproques.

Exercice 3
Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & H & \rightarrow & l^2_{\mathbb{N}} \\ & x & \mapsto & (< e_i, x >)_{i\in\mathbb{N}} \end{array}$$

1. Montrer que Φ est bien définie.
2. Montrer que Φ est une isométrie. En déduire que Φ est injective.
3. Conclure la preuve du théorème de Riesz-Fischer.

Exercice 4
Dans cet exercice on note $\mathcal{C}(S^1)$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ qui sont continues et 2π-périodiques. On désigne par $|| \cdot ||_\infty$ la norme infinie sur cet espace, et $|| \cdot ||_2$ la norme L^2 associée au produit scalaire défini pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{C}(S^1)$:

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g}(x)\,d\mu(x).$$

On dénote également $\mathcal{L}^2(S^1)$ l'espace des fonctions μ-mesurables (pour la mesure de Lebesgue μ) à valeurs complexe, 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ et de carré intégrable. On pose $L^2(S^1)$ l'espace des classes d'équivalence des éléments de $\mathcal{L}^2(S^1)$ modulo l'égalité μ-p.p. On rappel (voir cours d'integration) que l'espace $L^2(S^1)$ est un espace de Hilbert.

On définit enfin pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction $e_n : t \mapsto e^{int}$. Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(S^1)$.

1. On considère l'application (où l'on dénote encore la classe de f par f)

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathcal{C}(S^1) & \hookrightarrow & L^2(S^1) \\ & f & \rightarrow & f \end{array}$$

   Rappeler pourquoi Φ définie bien une injection continue de $(\mathcal{C}(S^1), || \cdot ||_\infty)$ vers $L^2(S^1)$.

2. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme un système orthonormé de $L^2(S^1)$ (on identifiera e_n a son image dans $L^2(S^1)$).

3. (*) On rappel que l'espace $\mathcal{E}(S^1)$ des fonctions μ-mesurable étagées à valeur complexes, 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, est dense dans $\mathcal{L}^2(S^1)$. Montrer que $\mathcal{C}(S^1)$ est dense dans $L^2(S^1)$. (On pourra utiliser le fait que pour tout borélien A,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V), A \subset V, V \text{ ouvert }\} = \sup\{\mu(F), F \subset A, F \text{ fermé }\}).$$

4. Montrer à l'aide du théorème de Stone-Weierstrass (Théorème 1 en fin de TD) que $(e_n)_n\in\mathbb{Z}$ forme une famille totale de $(\mathbb{C}(S^1), ||\cdot||_\infty)$

5. Montrer que $(e_n)_n\in\mathbb{Z}$ forme une famille totale de $L^2(S^1)$. Conclure.

Exercice 5
En s'inspirant de l'exercice précédent, démontrer que la famille des polynomes de Legendre (voir TD3) forme une base hilbertienne de $L^2([-1,1],\mathbb{R})$.

Rappel:

Théorème 1
[de Stone-Weierstrass] Soit (X,d) un espace métrique compact. On considère l'espace de Banach $(\mathcal{C}(X,\mathbb{C}), ||\cdot||_\infty)$. Soit $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire, stable par conjugaison, et qui sépare les points de X. Alors A est dense dans $(\mathcal{C}(X,\mathbb{C}), ||\cdot||_\infty)$.

On rappel qu'une $\mathbb{C}$-algèbre $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$:

- est *unitaire* si la fonction $x \mapsto 1$ est dans A.
- *sépare les points* si $\forall (x,y) \in X$, $x \neq y$, $\exists f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.
- est *stable par conjugaison* si $\forall f \in A$, $\overline{f} \in A$.