Université de Brest
Licence 3: PMRC Analyse
Année 2019-2020

Feuille TD 3 – Projections orthogonales

Exercice 1
Soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(H, < \cdot, \cdot >)$.

- Montrer que F est fermé.
- Montrer que $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Exercice 2
Soient F et G deux sous-espace d'un espace préhilbertien $(H, < \cdot, \cdot >)$.

1. Montrer que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
2. Montrer que $F \subset G$ implique $G^{\perp} \subset F^{\perp}$ et qu'il y a équivalence si H est de dimension finie.
3. On suppose H de dimension finie. Montrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 3
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire défini dans le cours. On pose $F \subset E$ défini par

$$F := \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$

A-t-on $E = F \oplus F^{\perp}$?

Exercice 4
Soit w une fonction continue, strictement positive sur un intervalle $I =]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit E l'espace des fonctions réelles continues sur $]a, b[$ et telles que la fonction $x \mapsto f(x)^2 w(x)$ soit intégrable sur $]a, b[$. On muni E d'une structure préhilbertienne via le produit scalaire:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

On suppose enfin que la restriction de toute fonction polynômiale à $]a, b[$ est dans E.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire et de degré n,
   - Pour tout $i \neq j$, P_i et P_j sont orthogonaux.
2. Prouver l'existence de deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(X) = (X + a_n)P_n(X) + b_{n-1}P_{n-1}(X).$$

3. On choisit $I =]-1,1[$ et $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Montrer que P_n est, à un coéfficient multiplicatif près, l'unique polynôme T_n tel que:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Préciser les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce cas.

Remarque : On obtient des familles de polynômes orthogonaux différentes en fonction du poids w utilisé. Voici une liste de familles fréquement rencontrées:

- Polynômes de Chebyshev: $I =]-1,1[$ et $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,
- Polynômes de Legendre: $I = [-1,1]$ et $w(x) = 1$,
- Polynômes de Laguerre: $I = [0,+\infty[$ et $w(x) = e^{-x}$,
- Polynômes d'Hermite: $I =]-\infty,+\infty[$ et $w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.