Université de Brest
Licence 3: PMRC Analyse
Année 2019-2020

Feuille TD 1 – Espaces préhilbertiens

Exercice 1
Démontrer que les applications suivantes définissent des produits scalaires:

- Sur $\mathbb{R}^n$: $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$: $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$.
- Sur $l^2_{\mathbb{N}}$: $< x, y >= \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$ (on commencera par montrer que cette quantité est bien définie)

Exercice 2
Démontrer les identités de polarisation et du parallèlogramme pour un espace préhilbertien.

Exercice 3
Soit w une fonction positive continue sur un intervalle I. On suppose que pour tout entier naturel n, la fonction $t \mapsto t^n w(t)$ est intégrable sur I.

1. Montrer que pour tout polynôme réel P la fonction $t \mapsto P(t)w(t)$ est intégrable sur I.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\int_I w(t)dt$ pour que l'application

$$(f, g) \mapsto \int_I f(t)g(t)w(t)dt$$

définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4
Donner des exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5
Montrer que la norme 1 sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas euclidienne.

Exercice 6
Soient (x, y) un couple de vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, < \cdot, \cdot >)$. On appelle mesure de l'angle de x et y l'unique scalaire $\theta \in [0, \pi]$ défini par:

$$\cos\theta = \frac{< x, y >}{||x||||y||}.$$

On suppose $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire défini en cours. Soit $f \in E \setminus \{0\}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, θ_n la mesure de l'angle de f et $x \mapsto x^n$.
Calculer la limite $\lim_{n\mapsto\infty} \theta_n$.

Exercice 7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, \cdots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose $F_1 \subset \cdots \subset F_r$. Que peut-on en déduire sur $F_1^\perp, \cdots, F_r^\perp$?

Exercice 8
Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, muni du produit scalaire:

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}dx.$$

Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de vecteurs de E définie par $f_n(x) = e^{inx}$ est orthonormale.

Exercice 9
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. Montrer que l'on défini un produit scalaire sur E en posant:

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

On note T_n l'unique polynome tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

Exercice 10
Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire défini dans le cours. On pose $F \subset E$ défini par

$$F := \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$

Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Calculer $(F^\perp)^\perp$ et comparer avec F.

Exercice 11
Soit p un projecteur d'un espace préhilbertien $(E, < \cdot, \cdot >)$. Montrer que p est orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||.$$