Université de Brest
Licence 3: PMRC Analyse
Année 2019-2020

Devoir Maison

Partie 1 à rendre pour le mercredi 04 Mars, partie 2 à rendre pour le 25 Mars.

Sur l'optimisation dans les espaces de Hilbert

Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, de norme associée $|| \cdot ||$. On considère sur H une *fonctionnelle quadratique*:

$$J : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}a(x,x) - f(x) \end{array}$$

c'est à dire où

$$a : H \times H \to \mathbb{R}$$

est une forme bilinéraire symétrique continue et

$$f : H \to \mathbb{R}$$

est une forme linéaire continue. On supposera de plus que J est *elliptique*, c'est à dire il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in H,\ a(x,x) \geq \alpha ||x||^2.$$

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème d'optimisation suivant:

Théorème 1. *Soit C une partie convexe, fermée et non vide de H et $J \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ une fonctionnelle quadratique elliptique. Alors il existe un unique $x_0 \in H$ vérifiant*

$$x_0 \in C \ \text{ et } \ J(x_0) = \inf_{x \in C} J(x).$$

Ce théorème est un outil fondamental en optimisation, et prouve l'existence et l'unicité d'une solution au problème de *minimisation avec contrainte convexe*:

$$(\mathcal{P}) \ \text{ trouver } \ x_0 \in C \ \text{ tel que } \ J(x_0) = \inf_{x \in C} J(x).$$

On commencera par établir un résultat de projection dans les Hilbert.

1. Projection sur un convexe fermé

Soit $C \subset H$ non-vide, convexe et fermée, et soit $x \in H$. On rappel que la distance de x à C est définie par

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} ||x - y||.$$

On va montrer:

Théorème 2. *Il existe un unique $P_C(x) \in C$ tel que*

$$d(x, C) = ||x - P_C(x)||.$$

On commence par montrer l'unicité. Supposons trouvé $p \in C$ tel que $d(x, C) = ||x - p||$.

Q 1) Montrer que pour tout $y \in C$, pour tout $t \in]0, 1[$, on a

$$||x - p||^2 \leq ||x - (ty + (1 - t)p)||^2.$$

Q 2) En déduire que pour tout $y \in C$,

$$< x - p, y - p > \leq 0. \tag{1}$$

Q 3) Supposons trouvé un deuxième élément $p' \in C$ tel que $d(x, C) = ||x - p'||$. Montrer que

$$||p - p'||^2 = < p - x, p - p' > + < x - p', p - p' > .$$

Q 4) À l'aide de (1), en déduire que $p = p'$. Conclure l'unicité dans le Théorème 2.

On démontre maintenant l'existence. Soit $\gamma = d(x, C)$.

Q 5) Montrer l'existence de $P_C(x) \in C$ réalisant la distance de x à C dans le cas $\gamma = 0$.

Q 6) On suppose $\gamma > 0$. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma^2 \leq ||x - y_n||^2 < \gamma^2 + \frac{1}{n}.$$

Q 7) Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Q 8) Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l dans C qui vérifie $d(x, C) = ||x - l||$. Conclure.

2. Preuve du théorème 1

On reprend les notations et les hypothèses du théorème 1. On va démontrer le Théorème 1. On pourra utiliser les résultats de la section précédente.

Q 9) Montrer que a défini un produit scalaire sur H.

Q 10) Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in H$,

$$|a(x, x)| \leq \beta ||x||^2.$$

Q 11) Montrer que la norme associée à a et la norme $||\cdot||$ sont équivalentes.

Q 12) En déduire qu'il existe un unique $c \in H$ tel que pour tout $x \in H$,

$$f(x) = a(c, x).$$

Q 13) Conclure la preuve du Théorème 1.