Université de Brest
Licence 3 PMRC
Année 2019-2020
Carl Tipler
carl.tipler@univ-brest.fr

Cours d'Analyse :
Espaces de Hilbert, séries et transformée de Fourier

Table des matières

1. Espaces préhilbertiens

Dans cette section on introduit une généralisation, d'un point de vue algébrique, des espaces euclidiens et hermitiens en dimension infinie : les espaces péhilbertiens.

1.1. Produits scalaires.
Soit E un $\mathbb{R}$-ev.

Définition 1.1. Un produit scalaire sur E est une application

$$< \cdot, \cdot >: E \times E \to \mathbb{R}$$

telle que, pour tout $(x, y, z) \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $<\cdot,\cdot>$ est bilinéaire :

$$<\lambda x+y,z>=\lambda<x,z>+<y,z> \quad \text{et} \quad <x,\lambda y+z>=\lambda<x,y>+<x,z>,$$

(2) $<\cdot,\cdot>$ est symétrique : $<x,y>=<y,x>$,
(3) $<\cdot,\cdot>$ est définie positive : $<x,x>\geqslant 0$ et si $<x,x>=0$ alors $x=0$.

Exemples 1.2. :

- Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ <x,y>:=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

- Sur l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

$$<f,g>:=\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt. \tag{1}$$

Définition 1.3. Un espace préhilbertien réel $(E,<\cdot,\cdot>)$ est un $\mathbb{R}$-ev E muni d'un produit scalaire $<\cdot,\cdot>$. Si de plus E est de dimension finie, on appelle $(E,<\cdot,\cdot>)$ un espace euclidien.

Notons qu'un même espace vectoriel E peut être muni de différents produits scalaires.

Exemples 1.4. :

- $(\mathbb{R}^n,<\cdot,\cdot>)$ avec $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire usuel,
- $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),<\cdot,\cdot>)$ avec le produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ défini par intégration (1).
- Soit $E=\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions rélles et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On obtient un espace préhilbertien $(E,<\cdot,\cdot>)$ en définissant :

$$\forall (f,g)\in E^2,\ <f,g>=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,dt. \tag{2}$$

- Soit

$$l^2_{\mathbb{N}}:=\left\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^2<+\infty\right\}. \tag{3}$$

On obtient un espace préhilbertien $(l^2_{\mathbb{N}},<\cdot,\cdot>)$ en posant, pour tout $(x,y)\in l^2_{\mathbb{N}}$:

$$<x,y>=\sum_{i=0}^{+\infty} x_i\,y_i. \tag{4}$$

Exercice 1.5. Vérifier que les exemples 1.4 définissent des espaces préhilbertiens réels.

Exercice 1.6. Donner d'autres exemples de structures préhilbertiennes sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (c'est à dire trouver d'autres exemples de produits scalaires sur ces espaces).

Définition 1.7. Une norme sur E est une application

$$N:E\to\mathbb{R}_+$$

telle que, pour tout $(x,y)\in E$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:
(1) N est définie : $N(x)=0$ implique $x=0$,
(2) N est homogène : $N(\lambda x)=|\lambda|N(x)$,

(3) N vérifie l'inégalité triangulaire : $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Notons que par définition, une norme est toujours positive.

Définition 1.8. Un espace vectoriel normé (réel) (E, N) est un espace vectoriel E (sur $\mathbb{R}$) muni d'une norme N.

Un espace vectoriel E peut être muni de différentes normes.

Exercice 1.9. Donner différents exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.10. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Pour tout $(x_1, \ldots, x_r) \in E^r$,*

$$N(\sum_{i=1}^{r} x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{r} N(x_i).$$

Démonstration. Par récurrence sur r, en utilisant l'inégalité triangulaire. □

Proposition 1.11. *Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} ||\cdot|| : & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{< x, x >} \end{array}$$

est une norme sur E.

On appelle la norme de la Proposition 1.11 la norme associée au produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Pour démontrer la Proposition 1.11, on utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Proposition 1.12. *Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x, y) \in E^2$,*

$$| < x, y > | \leqslant ||x|| \, ||y||, \tag{5}$$

avec égalité si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ tel que $\lambda x + \mu y = 0$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. On définit

$$\begin{array}{rccc} T : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \lambda & \mapsto & < x + \lambda y, x + \lambda y > . \end{array}$$

La fonction T est positive. De plus, par bilinéarité de $< \cdot, \cdot >$, T est un polynôme du second degré sur $\mathbb{R}$. Son coefficient dominant est $< y, y >$. Si ce dernier est non nul, la positivité de T implique que son discriminant doit être négatif. Un calcul du discriminant donne l'inégalité recherchée. Si $< y, y >= 0$, alors $y = 0$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est trivialement vérifiée. On laisse le cas dégalité en exercice au lecteur (noter que dans le cas $y \neq 0$, si le discriminant s'annule, T a une racine double). □

Dans les exemples 1.4, on obtient en particulier les inégalités suivantes :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \ |\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i},$$

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \ |\int_a^b f(t) \, g(t) \, dt| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \, dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 \, dt}$$

et enfin

$$\forall (x, y) \in l^2_{\mathbb{N}}, \ |\sum_{i=1}^{+\infty} x_i \, y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} x_i} \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} y_i}.$$

Preuve de la Proposition 1.11. On va démontrer l'inégalité triangulaire, et on laissera les autres axiomes à vérifier en exercice. Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\begin{array}{rcc} ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y|| & \Leftrightarrow & ||x+y||^2 \leqslant (||x|| + ||y||)^2 \\ & \Leftrightarrow & ||x||^2 + 2 < x,y > + ||y||^2 \leqslant ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 \\ & \Leftrightarrow & < x,y > \leqslant ||x||\,||y|| \end{array}$$

D'où l'inégalité triangulaire, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Dans un espace préhilbertien, la norme associée $||\cdot||$ suffit à déterminer le produit scalaire. On peut retrouver ce dernier par les identitées de polarisation :

Proposition 1.13. *Soit $(E, < \cdot,\cdot >)$ un espace préhilbertien réel. Le produit scalaire vérifie les identités de polarisation suivante : pour tout $(x,y) \in E^2$,*

$$< x,y > = \frac{||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2}{2} \tag{6}$$

et

$$< x,y > = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2}{4}. \tag{7}$$

Démonstration. Exercice pour le lecteur. □

Définition 1.14. Une norme N est dite euclidienne si l'application $< \cdot,\cdot >$ définie par la formule (6) ou (7) (avec N au lieu de $||\cdot||$) est un produit scalaire.

On pourra vérifier que la définition de norme euclidienne ne dépend pas de l'identité de polarisation choisie. Par ailleurs, la norme associée à un produit scalaire vérifie l'identité du parallèlogramme :

Proposition 1.15. *Soit $(E, < \cdot,\cdot >)$ un espace préhilbertien réel. Alors pour tout $(x,y) \in E^2$,*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2). \tag{8}$$

Démonstration. Exercice laissé au lecteur. □

1.2. **Produits hermitiens.** On s'intéresse dans cette section à la version complexe de produit scalaire. Soit E un $\mathbb{C}$-ev.

Définition 1.16. Un produit hermitien sur E est une application

$$< \cdot,\cdot > : E \times E \to \mathbb{C}$$

telle que, pour tout $(x,y,z) \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

(1) $< \cdot,\cdot >$ est sesquilinéaire :

$$< \lambda x + y, z > = \lambda < x,z > + < y,z > \text{ et } < x, \lambda y + z > = \overline{\lambda} < x,y > + < x,z >,$$

(2) $< \cdot,\cdot >$ est hermitienne : $< x,y > = \overline{< y,x >}$,

(3) $< \cdot,\cdot >$ est définie positive : $< x,x > \in \mathbb{R}_+$ et si $< x,x > = 0$ alors $x = 0$.

Exemples 1.17. :

- Le produit hermitien usuel sur $\mathbb{C}^n$:

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{C}^n)^2,\ < x,y > := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

- Sur l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$:

$$< f, g >:= \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt. \tag{9}$$

Définition 1.18. Un espace préhilbertien complexe $(E, <\cdot,\cdot>)$ est un $\mathbb{C}$-ev E muni d'un produit hermitien $<\cdot,\cdot>$. Si de plus E est de dimension finie, on appelle $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace hermitien.

Notons qu'un même espace vectoriel E peut être muni de différents produits hermitiens.

Exemples 1.19. :

- $(\mathbb{C}^n, <\cdot,\cdot>)$ avec $<\cdot,\cdot>$ le produit hermitien usuel,
- $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C}), <\cdot,\cdot>)$ avec le produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ défini par intégration (9),
- Soit

$$l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}) := \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^2 < +\infty \right\}. \tag{10}$$

On obtient un espace préhilbertien $(l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}), <\cdot,\cdot>)$ en posant, pour tout $(x,y) \in l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$:

$$< x, y >= \sum_{i=0}^{+\infty} x_i\,\overline{y_i}. \tag{11}$$

Exercice 1.20. Vérifier que les exemples 1.19 définissent des espaces préhilbertiens complexes.

Comme pour le cas réel, on obtient l'inégalité fondamentale suivante :

Proposition 1.21. *Soit $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace préhilbertien complexe. Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$| < x, y > |^2 \leqslant < x, x > < y, y >, \tag{12}$$

avec égalité si et seulement si il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}$ tel que $\lambda x + \mu y = 0$.

Démonstration. Soit $(x,y) \in E^2$. On définit

$$\begin{array}{rccc} S: & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \Re(< x, y >). \end{array}$$

L'application S définit un produit scalaire sur E, vu comme espace vectoriel réel. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz réelle, on obtient

$$|S(x,y)|^2 \leqslant \Re(< x, x >)\,\Re(< y, y >).$$

D'où

$$|\Re(< x, y >)|^2 \leqslant (< x, x > < y, y >). \tag{13}$$

D'autre part, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $< x, y >= e^{i\theta} | < x, y > |$. On applique alors l'inégalité (13) à $(e^{-i\theta}x, y)$:

$$|\Re(< e^{-i\theta}x, y >)|^2 \leqslant (< e^{-i\theta}x, e^{-i\theta}x > < y, y >).$$

Comme $\Re(< e^{-i\theta}x, y >) = \Re(| < x, y > |) = | < x, y > |$, on obtient l'inégalité recherchée :

$$| < x, y > |^2 \leqslant (< x, x > < y, y >).$$

Pour le cas d'égalité, supposons que $| < x, y > |^2 =< x, x >< y, y >$. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $< x, y >= e^{i\theta} | < x, y > |$. On a alors

$$(S(e^{-i\theta}x, y))^2 = | < x, y > |^2 =< x, x >< y, y >= S(e^{-i\theta}x, e^{-i\theta}x)S(y, y).$$

D'après le cas d'égalité dans le cadre réel, $e^{-i\theta}x$ et y sont liés dans l'espace vectoriel réel E : il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ tel que $\alpha e^{-i\theta}x + \beta y = 0$. On obtient le résultat en posant $\lambda = \alpha e^{-i\theta}$ et $\mu = \beta$. La réciproque est claire. □

On peut également définir une norme associée à un produit hermitien :

Définition 1.22. Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien complexe. L'application

$$|| \cdot || : E \to \mathbb{R}_+$$

définie par

$$\forall x \in E \ , \ ||x|| = \sqrt{< x, x >}$$

est la norme associée au produit hermitien $< \cdot, \cdot >$.

On vérifie que $|| \cdot ||$ vérifie les axiomes d'une norme :

Proposition 1.23. *Avec les notations de la Definition 1.22, pour tout $(x, y) \in E^2$:*

- $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\Re < x, y >$,
- $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ *(inégalité triangulaire),*
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ (homogénéité).*

Démonstration. Exercice pour le lecteur. □

On retrouve également des versions complexes de la polarisation et de l'identité du parallelogramme :

Proposition 1.24. *Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien complexe. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'identité de polarisation*

$$4 < x, y >= ||x + y||^2 - ||x - y||^2 - i||x - iy||^2 + i||x + iy||^2 \tag{14}$$

et l'égalité de la médiane

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2). \tag{15}$$

Démonstration. Exercice laissé au lecteur. □

1.3. **Orthogonalité.** On dénote par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel ou complexe.

Définition 1.25. Soit $(x, y) \in E^2$.

- x est dit unitaire si $||x|| = 1$.
- x et y sont orthogonaux si $< x, y >= 0$ (ou de manière équivalente si $< y, x >= 0$).

Lemme 1.26. *Soit $(x_i) \in E^r$ une famille finie d'éléments de E et soit $x \in E$.*
Alors $\forall i \in \{1, \dots r\}$, $< x, x_i >= 0$ si et seulement si $\forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^r$, $< x, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i >= 0$.

Définition 1.27. Deux sous-espaces F et G de E sont orthogonaux, noté $F \perp G$, si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $< x, y >= 0$.

La proposition importante suivante est immédiate :

Proposition 1.28. *Si F et G sont deux sous-espaces orthogonaux de E, alors F et G sont en somme directe.*

On notera une somme directe orthogonale par le symbol $\oplus$.

Définition 1.29. Soit $F \subset E$ un sous-ensemble de E. On définit l'orthogonal de F, noté $F^\perp$, par

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall f \in F, < x, f >= 0\}.$$

Remarque 1.30. L'orthogonal est défini pour n'importe quel sous-ensemble de E (F n'est pas nécessairement un espace-vectoriel). Par ailleurs, on pourra vérifier que $F^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E (même si F n'est pas un sous-espace vectoriel).

Remarque 1.31. Contrairement à la dimension finie, on n'a pas toujours $(F^\perp)^\perp = F$!

Définition 1.32. Soit $p \in L(E)$ un endomorphisme de E. On dit que p est un projecteur si $p^2 = p \circ p = p$.

Il sera utile de faire un dessin pour mieux cerner la proposition suivante :

Proposition 1.33. *Soit $p \in L(E)$ un projecteur de E. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\ker p \perp \operatorname{Im} p$,
ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $< x, p(y) >=< p(x), y >$,
iii) $\forall x \in E$, $< x, p(x) >= ||p(x)||^2$.

Définition 1.34. Un projecteur de E est un projecteur orthogonal s'il vérifie l'une des propriétés de la Proposition 1.33.

Démonstration. Avant toute chose, on remarque que pour tout $z \in E$, $z - p(z) \in \ker p$ par $p^2 = p$ et $p(z) \in \operatorname{Im} p$. Tout élément $z \in E$ peut donc se décomposer dans la somme $\ker p + \operatorname{Im} p$ sous la forme $z = z - p(z) + p(z)$.
Supposons *i*) valide. Soit $(x, y) \in E^2$. On décompose x et y en sommes d'éléments de $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$:

$$x = x - p(x) + p(x)$$

et

$$y = y - p(y) + p(y).$$

On développe, et on utilise $\ker p \perp \operatorname{Im} p$:

$$\begin{array}{rcl} < x, p(y) > & = & < x - p(x), p(y) > + < p(x), p(y) > \\ & = & < p(x), p(y) > \\ & = & < p(x), p(y) > + < p(x), y - p(y) > \\ & = & < p(x), y >, \end{array}$$

ce qui prouve *ii*).
Supposons que *ii*) soit vérifiée. On obtient *iii*) en posant $y = p(x)$.
Enfin, supposons *iii*) vraie. Soit $y \in \ker p$ et $z \in \operatorname{Im} p$. On applique *iii*) à $x = y + z$ et on obtient :

$$\begin{array}{rcll} < x, p(x) > & = & < p(x), p(x) > & \\ < y + z, p(y) + p(z) > & = & < p(y) + p(z), p(y) + p(z) > & \\ < y + z, p(z) > & = & < p(z), p(z) > & \text{car} \quad y \in \ker p \\ < y, z > + < z, z > & = & < z, z > & \text{car} \quad z \in \operatorname{Im} p. \end{array}$$

D'où $< y, z >= 0$ et $\ker p \perp \operatorname{Im} p$. $\square$

Lemme 1.35. *Soit p un pojecteur orthogonal de E. On a la décomposition en somme directe orthogonale :*

$$E = \ker p \ominus \operatorname{Im} p.$$

Démonstration. Par définition, $\ker p \perp \operatorname{Im} p$. Les espaces vectoriels $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont alors en somme directe. Par ailleurs, leur somme engendre E, car tout élément x de E peut se décomposer

$$x = x - p(x) + p(x),$$

et on a $x - p(x) \in \ker p$ (car $p \circ p = p$) et $p(x) \in \operatorname{Im} p$. □

On étend la notion d'orthogonalité aux familles :

Définition 1.36. Une famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est dite[1] :

- orthogonale si $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j,\ < x_i, x_j >= 0$,
- orthonormale si $\forall (i,j) \in I^2,\ < x_i, x_j >= \delta_{ij}$.

Exemples 1.37. :

- Sur $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, avec le produit

$$< f, g >= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt, \tag{16}$$

  la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $f_{2p+1}(t) = \cos((p+1)t)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $f_{2p}(t) = \sin(pt)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ est orthogonale.
- Sur $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, avec le produit

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt, \tag{17}$$

  la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par $f_n(t) = e^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ est orthogonale.

On a similairement à la Proposition 1.28 :

Lemme 1.38. *Une famille orthogonale de vecteurs de $E \backslash \{0\}$ est libre.*

Les familles orthogonales finies ont l'avantage de rendre la norme au carré additive, ce qui simplifie les calculs. Cette particularité est aussi connue sous le nom de théorème de Pythagore :

Proposition 1.39. *Soit $(x_i)_{i=1\dots r} \in E^r$ une famille orthogonale finie de E. Alors*

$$|| \sum_{i=1}^{r} x_i ||^2 = \sum_{i=1}^{r} ||x_i||^2.$$

Démonstration. Il suffit de développer le produit scalaire $< \sum_{i=1}^{r} x_i, \sum_{i=1}^{r} x_i >$ et d'appliquer l'orthogonalité des vecteurs. □

Corollaire 1.40. *Soit p un projecteur orthogonal. Alors pour tout $x \in E$,*

$$||x||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2.$$

Démonstration. Appliquer le théorème de Pythagore à $x - p(x) \in \ker p$ et $p(x) \in \operatorname{Im} p$. □

[1] Le symbole δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

2. **Espaces de Hilbert, complétude**

Le but de cette section est de définir une généralisation en dimension infinie, cette fois-ci d'un point de vue analytique, des espaces euclidiens et hermitiens. On va se restreindre à des cas particuliers d'espaces préhilbertiens, les espaces de Hilbert. Leur spécificité est la complétude, on commencera donc par rappeler la notion d'espace de Banach. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$-ev normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les notions topologiques seront considérées par rapport à la topologie induite par la norme N.

2.1. **Espaces de Banach.**

On rappelle qu'une suite de (E, N) est dite convergente si elle admet une limite dans E pour la norme N, et que dans ce cas cette limite est unique.

Définition 2.1. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de (E, N) est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n, m \geqslant n_\epsilon,\ N(x_n - x_m) < \epsilon.$$

Par abus de langage, on parlera de suites de Cauchy et de convergence dans E, bien que ces notions dépendent de la norme sur E. La norme sera sous-entendue si la situtation est assez claire.

Définition 2.2. L'espace (E, N) est un espace de Banach si il est complet, c'est à dire si toute suite de Cauchy est convergente.

Remarque 2.3. La complétude est en fait une notion définie dans le cadre plus large des espace métriques.

On rappelle également :

Lemme 2.4. *Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ de (E, N), alors*
- *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente implique que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy,*
- *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy implique que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Démonstration. Petit exercice de révision. $\square$

Voici quelques propriétés des espaces de Banach.

Proposition 2.5. *Soit (E, N) un espace de Banach, et $V \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors $(V, N_{|V})$ est un espace de Banach si et seulement si V est fermé dans E.*

Démonstration. Supposons V fermé, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(V, N_{|V})$. C'est en particulier une suite de Cauchy de (E, N) qui est complet. Donc elle admet une limite $l \in E$. Par la caractérisation séquentielle des fermés, $l \in V$, et $(V, N_{|V})$ est complet.
Supposons maintenant $(V, N_{|V})$ complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V, supposée convergente vers un élément $l \in E$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy. Mais par complétude de V, elle admet une limite $l' \in V$. Par unicité de la limite, $l = l'$ et donc $l \in V$. Donc V est fermé. $\square$

Proposition 2.6. *Soient (E, N) et (E', N') deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$. Les applications suivantes définissent des normes sur $E \times E'$:*
1. $N_\infty(x, x') := \max\{N(x), N'(x')\}$,
2. $N_1(x, x') := N(x) + N'(x')$,
3. $N_2(x, x') := \sqrt{(N(x))^2 + (N'(x'))^2}$.

De plus, l'espace $E \times E'$ est un espace complet pour chacune des normes N_∞, N_1 ou N_2.

Démonstration. Exercice. □

Exemples 2.7. :

- Les espaces $\mathbb{K}^d$ munis des normes
$$||x||_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geqslant 1$$
ou
$$||x||_\infty := \max \{|x_i|, i = 1 \dots d\}$$
sont des espaces de banach.
- Plus généralement, tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach. Par ailleurs, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
- $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$ muni de la norme
$$||f||_\infty := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$
est un espace de Banach.
- L'espace
$$l^p_{\mathbb{N}}(\mathbb{K}) := \left\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty\right\}, \tag{18}$$
muni de la norme
$$||x||_p = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{19}$$
avec $p \geqslant 1$ est un espace de Banach.

2.2. **Applications linéaires continues.** Soit (E, N) et (F, N') deux $\mathbb{K}$-ev normés. On note dans la suite du cours $L(E, F)$ l'espace des application linéaires entre les espaces vectoriels E et F. La proposition suivante caractérise l'espace des applications linéraires et continues, noté $\mathcal{L}(E, F)$. Cet espace dépend des normes N et N', mais les normes utilisées seront sous-entendues dans la notation.

Proposition 2.8. *Soit $A \in L(E, F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) *A est continue,*
ii) *A est continue en 0,*
iii) *A est bornée, c'est à dire qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in E$, $N'(A(x)) \leqslant CN(x)$.*

On parlera dans ce cas d'application continue, d'opérateur continu ou même d'opérateur borné pour désigner un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. Le fait que $i)$ implique $ii)$ est clair. Supposons A continue en 0. Par définition de la continuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, si $N(x) \leqslant \delta$, alors $N'(A(x)) \leqslant 1$. Mais comme pour tout $x \in E$, $N(\frac{\delta}{N(x)}x) \leqslant \delta$, on a alors pour tout $x \in E$:
$$N'(A(\frac{\delta}{N(x)}x)) \leqslant 1.$$

Par linéarité de A et homogénéité de N' on obtient $iii)$ avec $C = \dfrac{1}{\delta}$.
Enfin, supposons $iii)$ et fixons $C > 0$ tel que $\forall x \in E,\ N'(A(x)) \leqslant CN(x)$. Soit $(x, y) \in E^2$. Par linéarité de A, $N'(A(x) - A(y)) = N'(A(x - y))$. Par hypothèse on obtient

$$N'(A(x) - A(y)) \leqslant CN(x - y),$$

et donc A est C-lipschitzienne, donc continue. □

Exemple 2.9. Sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toute application linéaire est continue.

On peut définir une norme sur l'espace $\mathcal{L}(E, F)$:

Définition 2.10. Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. On défini la norme d'opérateur de A par :

$$||A||_{\mathcal{L}(E,F)} := \inf \left\{ C > 0 \mid \forall x \in E,\ N'(A(x)) \leqslant CN(x) \right\}. \tag{20}$$

Remarque 2.11. Cette norme d'opérateur dépend des normes N et N'. On utilisera parfois la notation $||A||$ pour s'alléger, ou au contraire $||A||_{N,N'}$ pour souligner le choix des normes N et N'. La notation $|||A|||$ est parfois rencontrée dans la littérature.

Lemme 2.12. *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors*

$$||A||_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup \left\{ N'(A(x)),\ N(x) \leqslant 1 \right\} = \sup \left\{ N'(A(x)),\ N(x) = 1 \right\}.$$

Démonstration. Exercice au lecteur. □

Exercice 2.13. Donner les normes d'opérateurs subordonnées à la norme $|| \cdot ||_1$ et à la norme $|| \cdot ||_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$.

Théorème 2.14. *L'espace $(\mathcal{L}(E, F), || \cdot ||_{\mathcal{L}(E,F)})$ est un $\mathbb{K}$-ev normé. De plus, si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

La preuve de ce résultat est importante, car elle utilise un schéma de démonstration qui sera repris plusieurs fois dans ce cours.

Démonstration. Le fait que $|| \cdot ||_{\mathcal{L}(E,F)}$ définisse une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ est simple à vérifier, l'inégalité triangulaire provenant essentiellement de l'inégalité triangulaire sur F. On suppose de plus que (F, N') est complet, et on va montrer que $(\mathcal{L}(E, F), || \cdot ||_{\mathcal{L}(E,F)})$ est complet. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés entre E et F. On suppose $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy pour la norme d'opérateur, que l'on notera $|| \cdot ||$. On doit montrer que cette suite converge, en norme d'opérateur, vers un opérateur borné.
Étape 1. Construction du candidat limite. Soit $x \in E$. On va définir $A(x)$, limite des $A_n(x)$. Si $x = 0$, on pose $A(x) = 0$. Sinon, soit $\epsilon > 0$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, il existe $n_{\epsilon,x}$ tel que pour tout $n, m \geqslant n_{\epsilon,x}$, $||A_n - A_n|| \leqslant \dfrac{\epsilon}{N(x)}$. Par définition de la norme d'opérateur, pour tout n, m,

$$N'(A_n(x) - A_m(x)) \leqslant ||A_n - A_m||\, N(x),$$

donc pour tout $n, m \geqslant n_{\epsilon,x}$,

$$N'(A_n(x) - A_m(x)) \leqslant \epsilon.$$

La suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, et comme F est complet, elle admet une limite, que l'on note $A(x)$.

Étape 2. Propriétés du candidat. On va maintenant montrer que l'application limite $x \mapsto A(x)$ a les propriétés demandées. Par définition, pour tout $x \in E$,

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x).$$

Par linéarité des A_n, $n \in \mathbb{N}$, et par linéarité de la limite, on déduit $A \in L(E, F)$. Par ailleurs, l'inégalité triangulaire pour $||\cdot||$ implique

$$\forall n, m\,,\ |(||A_n|| - ||A_m||)| \leqslant ||A_n - A_m||$$

et la suite réelle $(||A_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle-même de Cauchy, donc bornée par une constante $C > 0$. On a donc pour tout $x \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$N'(A_n(x)) \leqslant ||A_n|| N(x) \leqslant CN(x).$$

La norme étant continue, par passage à la limite on obtient

$$N'(A(x)) \leqslant CN(x)$$

et donc A est borné, d'où $A \in \mathcal{L}(E, F)$.
Étape 3. Convergence vers la limite. Reste à démontrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme d'opérateur vers A. Soit $\epsilon > 0$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, il existe n_ϵ tel que pour tout $n, m \geqslant n_\epsilon$,

$$||A_n - A_m|| \leqslant \epsilon. \tag{21}$$

Soit $n \geqslant n_\epsilon$. Soit $x \in E$. On a par construction de A

$$N'(A - A_n(x)) = \lim_{m\to+\infty} N'(A_m(x) - A_n(x)).$$

Par ailleurs pour tout m

$$N'(A_m(x) - A_n(x)) \leqslant ||A_m - A_n|| N(x)$$

et donc[2]

$$\lim \sup_{m\to+\infty} N'(A_m(x) - A_n(x)) \leqslant \lim \sup_{m\to+\infty} ||A_m - A_n|| N(x),$$

et pour m assez grand, avec l'inégalité (21) on obtient

$$N'(A - A_n(x)) \leqslant \epsilon N(x).$$

Par définition de la norme d'opérateur, on en déduit que pour $n \geqslant n_\epsilon$, $||A - A_n|| \leqslant \epsilon$, et donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A dans $\mathcal{L}(E, F)$ pour la norme d'opérateur. □

Voici la bonne notion d'isomorphisme dans le cadre linéaire continu :

Définition 2.15. Soit $E \in \mathcal{L}(E, F)$. On dira que A est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés si

i) A est inversible au sens linéaire (il existe $A^{-1} \in L(E, F)$),
ii) l'inverse linéaire de A est continu.

S'il existe un isomorphisme entre (E, N) et (F, N'), on dira que ces espaces vectoriels normés sont isomorphes.

Remarque 2.16. Un isomorphisme d'espaces vectoriels normés préserve les suites de Cauchy. En particulier, si (E, N) et (F, N') sont isomorphes, alors (E, N) est un espace de Banach si et seulement si (F, N') l'est.

[2]Notons que la limite de $||A_m - A_n||$ n'est pas connue à ce moment de la preuve.

2.3. **Espaces de Hilbert.** La notion algébrique qui généralise les espaces euclidiens ou hermitiens en dimension infinie est celle d'espace préhilbertien. Voici quelques résultats sur ces espaces. Tout d'abord, comme en dimension finie, le produit d'espaces préhilbertiens est naturellement un espace préhilbertien :

Lemme 2.17. *Soient $(H_i, < \cdot, \cdot >_i)$ des espaces préhilbertiens sur $\mathbb{K}$. Alors $H_1 \times H_2$ est un espace préhilbertien avec le produit :*

$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) > := < x_1, y_1 >_1 + < x_2, y_2 >_2 .$$

En particulier, pour tout espace préhilbertien $(H, < \cdot, \cdot >)$, le produit $H \times H$ est naturellement un espace préhilbertien. Il est donc naturellement muni d'une norme associée au produit scalaire, et c'est par rapport à cette norme que l'on considère les notions de continuité dans la proposition suivante :

Proposition 2.18. *Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien. Alors les applications :*

$$|| \cdot || : H \to \mathbb{K}$$

et

$$< \cdot, \cdot >: H \times H \to \mathbb{K}$$

sont continues.

Démonstration. On donne les grandes lignes de la preuve, les détails sont laissés en exercice. Tout d'abord $(H, ||\cdot||)$ est un espace vectoriel normé. L'inégalité triangulaire implique que $x \mapsto ||x||$ est lipschitzienne, et donc continue. Pour la continuité du produit scalaire, si $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (x, y) dans $H \times H$, on a en particulier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers y. Ces suites sont donc bornées. Ensuite, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} | < x_n, y_n > - < x, y > | &\leqslant | < x_n, y_n - y > | + | < x_n - x, y > | \\ &\leqslant ||x_n|| ||y_n - y|| + ||x_n - x|| ||y||. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat par passage à la limite. □

On en déduit la propriété suivante de l'orthogonal :

Proposition 2.19. *Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien, et $V \subset H$ un sous-ensemble. Alors $V^\perp$ est fermé.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (V^\perp)^{\mathbb{N}}$ une suite de $V^\perp$ qui converge vers $x \in H$. Soit $y \in V$. Par continuité du produit scalaire, $(< x_n, y >)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $< x, y >$, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $< x_n, y >= 0$, on en déduit $< x, y >= 0$. Donc $x \in V^\perp$ et $V^\perp$ est fermé. □

Cependant, d'un point de vue de l'analyse, les espaces préhilbertiens et les applications linéaires ne sont pas satisfaisants. La bonne notion, comme on le verra dans ce cours, est celle d'espace de Hilbert :

Définition 2.20. Un espace de Hilbert $(H, < \cdot, \cdot >)$ (sur $\mathbb{K}$) est un espace préhilbertien $(H, < \cdot, \cdot >)$ (sur $\mathbb{K}$) tel que $(H, || \cdot ||)$ soit complet, où $|| \cdot ||$ est la norme associée au produit $< \cdot, \cdot >$.

Un espace de Hilbert est donc un cas particulier d'espace de Banach dont la norme est euclidienne, ou hermitienne (i.e. vérifie les identités de polarisation).

Exemples 2.21. :

- Tout espace euclidien ou hermitien est un espace de Hilbert.
- Les espaces $l^2_{\mathbb{N}}$ et $l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ muni des produits (4) et (11) sont des espaces de Hilbert.
- L'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{K})$ muni du produit (1) **n'est pas** un espace de Hilbert.

On va énoncer un résultat fondamental des espaces de Hilbert, dont la preuve sera donnée plus tard dans le cours :

Théorème 2.22 (Théorème de décomposition dans les Hilbert)**.** *Soit* $(H, < \cdot, \cdot >)$ *un espace de Hilbert, et* $V \subset$ *un sous-espace fermé. Alors*

$$\forall x \in H\ ,\ \exists!\,(v_x, w_x) \in V \times V^{\perp} \ \ \textit{tel que}\ \ x = v_x + w_x.$$

Autrement dit, on a la décomposition en somme directe orthogonale :

$$H = V \oplus V^{\perp}.$$

Définition 2.23. Avec les notations du théorème 2.22, on pose pour tout $x \in H$

$$(p_V(x), p_{V^{\perp}}(x)) := (v_x, w_x).$$

L'application

$$\begin{array}{rccc} p_V : & H & \to & V \\ & x & \mapsto & p_V(x) \end{array}$$

est appelée projection orthogonale sur V.

Lemme 2.24. *Soit* V *un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert. La projection orthogonale sur* V *est un opérateur linéaire continu, de norme* 1 *dès que* $V \neq \{0\}$.

Démonstration. Le fait que p_V soit un opérateur borné de norme inférieure à 1 est une application du théorème de Pythagore. Pour l'égalité des normes, il suffit d'évaluer p_V sur V. $\square$

En corollaire du Théorème 2.22, on retrouve le résultat suivant, déjà connu en dimension finie :

Corollaire 2.25. *Soit* V *un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert* $(H, < \cdot, \cdot >)$*. Alors* $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

Démonstration. Soit $x \in V$, et soit $y \in V^{\perp}$. Alors $< x, y >= 0$ et donc $x \in (V^{\perp})^{\perp}$. D'où

$$V \subset (V^{\perp})^{\perp}.$$

Pour l'inclusion inverse, Soit $x \in (V^{\perp})^{\perp}$. Par hypothèse, on peut décomposer

$$x = p_V(x) + p_{V^{\perp}}(x).$$

Par construction, $p_{V^{\perp}}(x) \in V^{\perp}$. Comme $x \in (V^{\perp})^{\perp}$, on obtient

$$0 =< x, p_{V^{\perp}}(x) >=< p_V(x) + p_{V^{\perp}}(x), p_{V^{\perp}}(x) >=< p_{V^{\perp}}(x), p_{V^{\perp}}(x) >$$

car $V \perp V^{\perp}$. Donc $||p_{V^{\perp}}(x)|| = 0$ et $p_{V^{\perp}}(x) = 0$. Finalement, $x = p_V(x) \in V$, et

$$(V^{\perp})^{\perp} \subset V.$$

$\square$

3. **Projections orthogonales**

Dans un espace vectoriel normé, un des intérêts d'avoir une norme provenant d'un produit scalaire est de pouvoir faire des projections orthogonales. On va étudier les projections dans trois cadres, celui des espaces euclidiens (ou hermitiens), celui des espaces de Hilbert et celui des espaces préhilbertiens. On rappelle le crédo suivant :

$$\{ \text{ Espaces euclidiens } \} \subset \{ \text{ Espaces de Hilbert } \} \subset \{ \text{ Espaces préhilbertiens} \}$$

Les résultats de projections orthogonales sur un sous-espace $V \subset H$ seront donc de plus en plus restrictif sur V à mesure que l'on assouplira les hypothèses sur H. On verra dans ce chapitre que la projection orthogonale sur $V \subset H$ est bien définie dans les cadres suivants :

$$\begin{array}{ccccc} H \text{ euclidien ou hermitien} & \leqslant & H \text{ hilbertien} & \leqslant & H \text{ préhilbertien} \\ \bigcup & & \bigcup & & \bigcup \\ V \text{ sous-espace} & \geqslant & V \text{ sous-espace fermé} & \geqslant & V \text{ sous-espace de dimension finie} \end{array}$$

3.1. **Projection en dimension finie.**

En dimension finie, on dispose d'un procédé explicite pour effectuer des projections orthogonales, via les bases orthonormées. Dans cette section, $(E, < \cdot, \cdot >)$ désigne un espace euclidien ou hermitien non réduit à zéro.

Théorème 3.1. *L'espace $(E, < \cdot, \cdot >)$ possède une base de vecteurs orthonormés.*

Démonstration. Soit $n := \dim_{\mathbb{K}}(E)$. On démontre par récurrence sur $k \in \{1, \dots, n\}$ la propriété suivante :

$\mathcal{P}_k$: Tout sous espace de E de dimension k possède une base de vecteurs orthonormés.

La propriété $\mathcal{P}_1$ est claire, il suffit de normaliser un générateur de V. Supposons donc $\mathcal{P}_k$ vraie, pour $k < n$, et démontrons alors que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie. Soit V un sous-espace de E de dimension $k+1$ et soit $x \in V \backslash \{0\}$. On pose $e_{k+1} := \frac{x}{||x||}$, et on définit l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi : & V & \to & \mathbb{K} \\ & y & \mapsto & < y, e_{k+1} > . \end{array}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que l'on a une somme directe orthogonale

$$V = \ker \phi \ominus \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{e_{k+1}\}.$$

En particulier, $\ker \phi$ est un sous-espace de E de dimension k, et $\mathcal{P}_k$ s'applique. Il existe donc $\{e_1, \dots, e_k\}$ une base orthonormée de $\ker \phi$. La famille $\{e_1, \dots, e_{k+1}\}$ est une base orthonormée de V. Le résultat suit alors par récurrence. $\square$

3.2. **Projection dans un espace préhilbertien.**

On va utiliser l'existence de base orthonormale en dimension finie pour donner une formule explicite de projection orthogonale. Dans cette section, $(H, < \cdot, \cdot >)$ désigne un espace préhilbertien et $V \subset H$ un sous-espace **de dimension finie** d.

Lemme 3.2. *On a*

$$\forall x \in H \ , \ \exists ! v_x \in V \ \text{ tel que } x - v_x \in V^{\perp}.$$

Démonstration. Soit $x \in H$. Si $V = \{0\}$, nécessairement $v_x = 0$. Si $\dim V \geqslant 1$, il existe une base orthonormale $\{e_1, \dots, e_d\}$ de $(V, < \cdot, \cdot >_{|V})$. On cherche alors $v_x \in V$ sous la forme

$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i$. Soit $(\lambda_i)_{i=1\ldots d} \in \mathbb{K}^d$ et $v := \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i$.

$$\begin{aligned} x - v \in V^\perp &\iff \forall i \in \{1, \ldots, d\}\,,\ < e_i, x - v >= 0 \\ &\iff \forall i \in \{1, \ldots, d\}\,,\ < e_i, x >=< e_i, v > \\ &\iff \forall i \in \{1, \ldots, d\}\,,\ < e_i, x >= \sum_{j=1}^{d} \lambda_i < e_i, e_j > \\ &\iff \forall i \in \{1, \ldots, d\}\,,\ < e_i, x >= \lambda_i. \end{aligned}$$

D'où l'exitence et l'unicité de $v_x = \sum_{j=1}^{d} < x, e_j > e_j$. □

Définition 3.3. Avec les notations du Lemme 3.2, l'élément v_x sera noté $p_V(x)$ et appelé projection orthogonale de x sur V.

Dans la preuve du Lemme 3.2, on a démontré la formule explicite suivante :

Lemme 3.4. *Si $\{e_1, \ldots, e_d\}$ est une base orthonormale de V, on a*

$$p_V(x) = \sum_{j=1}^{d} < x, e_j > e_j. \tag{22}$$

Une conséquence du Lemme 3.2 est le théorème de projection sur un espace de dimension finie dans un espace préhilbertien :

Théorème 3.5. *Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien et $V \subset H$ un sous-espace de dimension finie. Alors*

i) *On a une décomposition orthogonale $H = V \oplus V^\perp$,*
ii) *L'application de projection $p_V : H \to V$ est un projecteur orthogonal d'image V et de noyau $V^\perp$.*
iii) *Si de plus H est de dimension finie,* $\dim(H) = \dim(V) + \dim(V^\perp)$.

Remarque 3.6. On notera que comme $V \subset H$ est de dimension finie, il est fermé. Il en est de même pour $V^\perp$, par la Proposition 2.19. En particulier, le Théorème 3.5 est un cas particulier du Théorème 2.22 si $(H, || \cdot ||)$ est complet.

Démonstration. D'après le Lemme 3.2, pour tout $x \in H$, il existe un unique $v_x \in V$ tel que $x - v_x \in V^\perp$. Alors tout élément $x \in H$ s'écrit $x = v_x + x - v_x$ avec $v_x \in V$ et $x - v_x \in V^\perp$. On en déduit $i)$.
Si $x \in V$, $p_V(x) = x$ car $x - x = 0 \in V^\perp$ et par unicité de la projection orthogonale de x sur V. Donc $p_V^2 = p_V$ et p_V est un projecteur. Son image est incluse dans V par construction, et égale à V car p_V restreinte à V est l'identité. Par ailleurs, $V^\perp \subset \ker p_V$ par construction. D'après $i)$, on en déduit $\ker p_V = V^\perp$. Enfin, on a $\ker p_V \perp \operatorname{Im} p_V$ et donc p_V est un projecteur orthogonal.
Le point $iii)$ est une application du point $i)$. □

On rappelle enfin un algorithme pour obtenir une base orthonormale :

Proposition 3.7 (Algorithme de Gram-Schmidt)**.** *Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien, et $\{x_1, \dots x_p\}$ une famille libre finie de vecteurs de H.*
On pose $F_0 := \{0\}$, et pour $k \in \{1, \dots, p\}$, $F_k := \text{Vect}\{x_1, \dots, x_k\}$ ainsi que

$$u_k = x_k - p_{F_{k-1}}(x_k).$$

Alors la famille $\{u_1, \dots u_p\}$ vérifie :

i) *pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$,*

$$u_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} < x_k, u_j > \frac{u_j}{||u_j||^2}$$

ii) *la famille $\{u_1, \dots, u_p\}$ est orthogonale,*

iii) *pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_k\} = F_k$.*

Démonstration. Le point *i)* provient de l'équation (22), par récurrence sur k. On démontre également le point *iii)* par récurrence, en observant que

$$F_{k+1} = \text{Vect}\{x_1, \dots x_{k+1}\} = F_k \oplus \text{Vect}\{x_{k+1}\} = F_k \oplus \text{Vect}\{u_{k+1}\}.$$

Le point *ii)* suit la preuve du *iii)*. □

On en déduit

Corollaire 3.8. *Dans un espace euclidien ou hermitien, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormée.*

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est une famille orthonormale d'un espace préhilbertien de dimension finie, on la complète en une base $\mathcal{F}'$. Puis on applique le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{F}'$ pour obtenir une base orthogonale qu'il suffit de normaliser. □

Les projections orthogonales permettent de minimiser les distances, et sont donc utiles en optimisation.

Définition 3.9. Soit $F \subset H$ un sous-ensemble d'un espace préhilbertien $(H, < \cdot, \cdot >)$ et $x \in H$. On appelle distance de x à F, noté $d(x, F)$, la quantité

$$d(x, F) = \inf_{f \in F} ||x - f||.$$

Proposition 3.10. *Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien et $V \subset H$ un sous-espace de dimension finie. Alors la fonction*

$$\begin{array}{rccc} d(x, \cdot): & V & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & ||f - x|| \end{array}$$

admet un unique minimum en $p_V(x)$.

Autrement dit, pour un sous-espace de dimension finie V et $x \in H$, la distance de x à V est atteinte en la projection orthogonale de x sur V.

Démonstration. On pose la fonction

$$\begin{array}{rccc} \phi_x: & V & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & ||f - x||^2. \end{array}$$

La fonction ϕ_x est différentiable (il suffit de l'écrire dans une base de V, qui est de dimension fini). Son minimum, s'il existe, est un point critique.
Un tel minimum existe. En effet,

$$\phi_x(v) = ||v||^2 + 2\Re < x, v > + ||x||^2$$

et donc ϕ_x tend vers $+\infty$ quand $||v|| \to +\infty$. Il existe donc $R > 0$ tel que, posant

$$K := \{w \in V \mid ||w|| \leqslant R\},$$

pour tout $v \notin K$, $\phi_x(v) \geqslant \phi_x(0)$. Comme K est compacte, ϕ_x atteint son minimum sur K.
Enfin, soit $u \in V$ un minimum de ϕ_x. La différentielle de ϕ_x en u s'annule, soit

$$\forall v \in V, < x - u, v >= 0.$$

Autrement dit, $x - u \in V^\perp$, et donc nécessairement $u = p_V(x)$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 3.11. Avec les notations de la Proposition 3.10,

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= ||x - p_V(x)||^2 + ||p_V(x)||^2 \\ &= d(x, V)^2 + ||p_V(x)||^2 \end{aligned}$$

et donc

$$d(x, F) \leqslant ||x||.$$

3.3. **Projection dans un espace de Hilbert.** Dans cette section, on considère $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace de Hilbert et $V \subset H$ un sous-espace fermé (pas nécessairement de dimension finie). On rappelle alors le Théorème 2.22 :

Théorème 3.12. *On a*

$$\forall x \in H\,,\ \exists! v_x \in V \ \textit{ tel que } x - v_x \in V^\perp.$$

Comme pour la Section 3.2, on posera pour tout $x \in H$ la projection orthogonale sur V :

$$p_V(x) := v_x.$$

On a également :

Corollaire 3.13. *L'espace H se décompose :*

$$H = V \oplus V^\perp.$$

et en suivant la preuve du Théorème 3.5, *ii*), on obtient :

Proposition 3.14. *L'application $p_V : H \to V$ est un projecteur orthogonal de noyau $V^\perp$ et d'image V.*

Preuve du Théorème 3.12. Soit $x \in H$. On procède en deux étapes :
1. Unicité . Supposons que x admettent deux décompositions

$$x = v_x + w_x = v'_x + w'_x$$

avec $(v_x, v'_x) \in V^2$ et $(w_x, w'_x) \in (V^\perp)^2$. Alors $v_x - v'_x = w'_x - w_x \in V \cap V^\perp$. Mais V et $V^\perp$ sont en somme directe, donc $v_x = v'_x$ et $w_x = w'_x$.
2. Existence. Le résultat est clair si $V = H$, on supposera donc $V \neq H$. De même, si $x \in V$, on prend $v_x = x$ et on obtient le résultat. On supposera alors $x \notin V$. On pose $d := d(x, V)$ la distance de x à V. Comme V est fermé et $x \notin V$, $d > 0$ (sinon on obtiendrait une suite

minimisante $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans V telle que $||x_i - x|| \to 0$ et on aurait $x \in V$ par fermeture). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par définition de la distance de x à V, on peut fixer $x_n \in V$ tel que

$$||x - x_n||^2 < d^2 + \frac{1}{n}. \tag{23}$$

On va montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la projection recherchée. On montre tout d'abord que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, avec l'identité du parallèlogramme (où de la médiane) on obtient :

$$\begin{array}{rcl} ||x_m - x_n||^2 & = & 2(||x - x_n||^2 + ||x - x_m||^2) - ||2x - (x_n + x_m)||^2 \\ & = & 2(||x - x_n||^2 + ||x - x_m||^2) - 4||x - \dfrac{(x_n + x_m)}{2}||^2 \\ & \leqslant & 2(d^2 + \dfrac{1}{n} + d^2 + \dfrac{1}{m}) - 4d^2 \\ & \leqslant & 2(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}). \end{array}$$

Pour la première inégalité, on a utilisé le fait que $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in V$ et donc $d \leqslant ||x - \frac{(x_n + x_m)}{2}||$, ainsi que l'inégalité (23). La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, et convergente car H est complet. Comme V est fermé, sa limite, noté v_x, est dans V. Reste à montrer que $x - v_x \in V^\perp$. Soit $v \in V$. On calcul $< v, x - v_x >$. Pour cela, on note que par continuité de la norme, et passage à la limite dans l'inégalité (23), $||x - v_x|| = d$. D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $v_x + \alpha v \in V$ et donc

$$\begin{array}{rcl} d^2 & \leqslant & ||x - (v_x + \alpha v)||^2 \\ & \leqslant & ||x - v_x||^2 - 2\Re(< x - v_x, \alpha v >) + \alpha^2 ||v||^2 \\ & \leqslant & d^2 - 2\Re(< x - v_x, \alpha v >) + \alpha^2 ||v||^2. \end{array}$$

Donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme du second degré en α suivant est positif :

$$\alpha^2 ||v||^2 - 2\alpha\Re(< x - v_x, v >) \geqslant 0.$$

On en déduit $\Re(< x - v_x, v >) = 0$. Si H est réel, on a $< x - v_x, v >= 0$. Si H est complexe, on procède de même avec $v_x + i\alpha v$ et on obtient $< x - v_x, v >= 0$. Ceci est vrai pour tout $v \in V$, et on a bien $x - v_x \in V^\perp$. □

Remarque 3.15. On a vu au cours de la preuve que la distance de x à V est atteinte sur V en un unique point, la projection orthonale de x sur V :

$$d(x, V) = ||x - p_V(x)||.$$

On rappelle qu'en dimension finie, si E est un espace euclidien (resp hermitien), on a un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) d'espaces euclidiens :

$$\begin{array}{rcl} E & \to & E^* \\ a & \mapsto & (x \mapsto < x, a >). \end{array}$$

Dans le cadre hilbertien, on a un résultat analogue pour le dual topologique de H, c'est à dire $\mathcal{L}(H, \mathbb{K})$. C'est un corollaire du théorème de projection. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de représentationn de Riesz :

Théorème 3.16 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit* $(H, < \cdot, \cdot >)$ *un espace de Hilbert et* $f \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$*. Il existe un unique* $y_f \in H$ *tel que*

$$\forall x \in H\ ,\ f(x) =< x, y_f > .$$

De plus, on a l'égaité des normes

$$||y_f|| = ||f||_{\mathcal{L}(H,\mathbb{K})}.$$

Réciproquement, soit $y \in H$. Alors l'application

$$\begin{array}{cccc} f_y : & H & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & < x, y > \end{array}$$

est une forme linéaire continue, de norme $||f_y||_{\mathcal{L}(H,\mathbb{K})} = ||y||$.

Remarque 3.17. On notera que la dualité porte sur le dual topologique des formes linéaires et continues $\mathcal{L}(H,\mathbb{K})$, et non pas sur le dual algébrique $L(H,\mathbb{K})$ des formes linéaires.

Corollaire 3.18. *Un espace de Hilbert $(H, ||\cdot||)$ est donc isométrique à son dual topologique $(\mathcal{L}(H,\mathbb{K}), ||\cdot||_{\mathcal{L}(H,\mathbb{K})})$ via l'application*

$$\begin{array}{ccc} H & \rightarrow & \mathcal{L}(H,\mathbb{K}) \\ a & \mapsto & (x \mapsto < x, a >). \end{array}$$

Remarque 3.19. Comme en dimension finie, cette application est $\mathbb{R}$-linéaire mais seulement $\mathbb{C}$-anti-linéaire. On fera donc attention si l'on souhaire parler d'isomorphisme... On a tout de même que le bidual topologique de H est isomorphe à H. Cette propriété, appelée réflexivité, est une propriété intéressante des espaces de Hilbert par rapport aux espaces de Banach qui ne sont pas tous réfléxifs.

Preuve du théorème 3.16. Soit $f \in \mathcal{L}(H,\mathbb{K})$.
1. Unicité. Supposons qu'il existe $(y,z) \in H^2$ tel que

$$\forall x \in H\ ,\ f(x) =< x, y >=< x, z > .$$

Alors, avec $x = y - z$, on obtient $< y - z, y - z >= 0$ et donc $y = z$.
2. Existence. Posons $V = \ker f$. On peut supposer $f \neq 0$, sinon on prend $y_f = 0$. On a alors $V \neq H$. Notons également que f étant continue, V est fermé. Soit $y \in H \backslash V$. Par le théorème de projection orthogonale, il existe un unique $v_y \in V$ tel que $y_0 := y - v_y \in V^{\perp}$. On normalise alors y_0 et on pose alors

$$y_f := \frac{\overline{f(y_0)}}{||y_0||^2} y_0.$$

Soit $x \in H$. On peut décomposer x sous la forme

$$x = x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f + \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f,$$

avec

$$\frac{f(x)}{f(y_f)} y_f \in \text{Vect}\{y_0\} \subset V^{\perp}$$

et

$$x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f \in \ker f = V.$$

Si $x \in V$, $f(x) = 0$ et $< x, y_f >= 0$. Si $x \in V^{\perp}$, alors $x = \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f$ et un calcul direct montre que $f(x) =< x, y_f >$.
3. Égalité des normes. Par définition et d'après l'étape 2,

$$||f|| = \sup_{||x|| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{||x|| \leqslant 1} | < x, y_f > |.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $||f|| \leqslant ||y_f||$. Par ailleurs, $||f|| \geqslant f(\frac{y_f}{||y_f||})$ et donc $||f|| \geqslant ||y_f||$.
4. Réciproque. Pour $y \in H$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que l'application f_y est bornée, de norme inférieure à $||y||$. L'égalité des normes est obtenue par évaluation en $\frac{y}{||y||}$. $\square$

4. **Bases hilbertiennes**

On va introduire un analogue hilbertien de la notion de base orthonormée d'un espace euclidien ou hermitien.

4.1. **Définition des bases hilbertiennes.** Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien.

Définition 4.1. Une partie $G \subset H$ est dite dense dans H si

$$\forall h \in H \ , \ \forall \epsilon > 0 \ , \ \exists g \in G \ \text{ tel que } \ ||g - h|| < \epsilon.$$

Remarque 4.2. De manière équivalente, G est dense dans H si l'une des propositions suivantes est vérifiées

- tout élément de H est limite d'une suite d'éléments de G,
- la fermeture $\overline{G}$ de G est égale à H.

Définition 4.3. Une partie $F \subset H$ de H est totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies de F est dense dans H :

$$\overline{\{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i, \ r \in \mathbb{N}, \ (\lambda_i) \in \mathbb{K}^r, \ (f_i) \in F^r\}} = H.$$

On rappelle également :

Définition 4.4. Une famille de vecteur $\{e_i, i \in I\}$ est dite orthonormée si

$$\forall i, j \in I^2 \ , \ < e_i, e_j >= \delta_{ij}.$$

On généralise alors la notion de base orthonormée d'un espace euclidien ou hermitien à la dimension quelconque :

Définition 4.5. Une base hilbertienne, ou base orthonormée, de $(H, < \cdot, \cdot >)$ est une famille orthonormée et totale de H.

Exemple 4.6. Si H est de dimension finie, une base hilbertienne est exactement une base orthonormée.

Dans la définition de base hilbertienne, la liberté de la famille est assurée par l'orthogonalité des vecteurs. L'aspect générateur de la famille est lui assuré par son caractère total. Dans la pratique, on souhaiterait décomposer les vecteurs de H dans une base hilbertienne. Idéalement, cette décomposition serait donnée sous la forme d'une limite de série. Pour cela, on aura besoin de deux choses : assurer la convergence des séries d'une part, et d'autre part avoir une famille totale dénombrable.

Définition 4.7. L'espace $(H, < \cdot, \cdot >)$ est dit séparable s'il admet une partie dense au plus dénombrable.

Lemme 4.8. *Si $(H, < \cdot, \cdot >)$ admet une famille dénombrable $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ totale, alors H est séparable.*

Démonstration. En effet, la famille $\{\lambda f_k \ , \ \lambda \in \mathbb{Q} \ , \ k \in \mathbb{N}\}$ est dense et dénombrable (prendre $\lambda + i\mu \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dans le cas complexe). □

Voici un résultat d'existence de base hilbertienne dénombrable[3].

[3]Encore un avantage des espaces de Hilbert par rapport aux espaces préhilbertiens.

Proposition 4.9. *Tout espace de Hilbert séparable*[4] *de dimension infinie possède une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. Soit $(H, <\cdot,\cdot>)$ un espace de Hilbert séparable. Par séparabilité, on peut fixer $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans H. On extrait alors par récurrence une sous-suite $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

i) $\forall k \in \mathbb{N},\ \{g_{n_j},\ 0 \leqslant j \leqslant k\}$ est libre,
ii) $\forall k \in \mathbb{N},\ E_k := \text{Vect}\,\{g_{n_j},\ 0 \leqslant j \leqslant k\} = \text{Vect}\,\{g_j,\ 0 \leqslant j \leqslant n_k\}$ et
iii) $H = \overline{E}$ où $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

On orthonormalise la famille $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ obtenue avec le procédé de Gram-Schmidt, et l'on obtient une famille $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ orthonormée telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{e_{n_j},\ 0 \leqslant j \leqslant k\}$ est une base orthonormée de E_k. Reste à montrer que cette famille est totale. Soit $x \in H$ et soit $\epsilon > 0$. Par densité de E, il existe $e \in E$ tel que $||x - e|| < \epsilon$. Par *iii*), il existe k tel que $e \in E_k$. Mais alors e est combinaison linéaire finie des $(e_{n_i})_{i\leqslant k}$. La famille est donc totale. □

Proposition 4.10. *Si* $(H, <\cdot,\cdot>)$ *est un espace de Hilbert séparable, toute base hilbertienne est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit $\{e_i,\ i \in I\}$ une base hilbertienne de H. Il s'agit de montrer qu'il existe une injection de I dans $\mathbb{N}$. Par le théorème de Pythagore,

$$\forall i, j \in I^2,\ i \neq j,\ ||e_i - e_j|| = \sqrt{2}.$$

D'autre part, H est séparable, donc on peut fixer une famille $\{f_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ dense dans H. En particulier, pour tout $i \in I$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que

$$||e_i - f_{n_i}|| < \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

L'inégalité triangulaire implique alors

$$\begin{array}{rcccl} \sqrt{2} & = & ||e_i - e_j|| & \leqslant & ||e_i - f_{n_i}|| + ||f_{n_i} - f_{n_j}|| + ||f_{n_j} - e_j|| \\ \sqrt{2} & & & \leqslant & ||f_{n_i} - f_{n_j}|| + \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{array}$$

D'où

$$||f_{n_i} - f_{n_j}|| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}$$

et $i \mapsto n_i$ est injective. □

Remarque 4.11. On a en fait démontré que toute famille orthonormée dans un espace de Hilbert séparable est au plus dénombrable.

Proposition 4.12. *Soit* $(H, <\cdot,\cdot>)$ *un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne* $\{e_i, i \in I\}$. *Si* $x \in H$ *vérifie*

$$\forall i \in I,\ < x, e_i >= 0,$$

alors $x = 0$.

Autrement dit, une base hilbertienne est une famille orthonormée maximale pour l'inclusion.

[4] En pratique, la plupart des espaces de Hilbert que l'on rencontrera, si ce n'est l'intégralité, seront séparables.

Démonstration. Soit $x \in H$ tel que

$$\forall i \in I,\ , < x, e_i >= 0.$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe une combinaison linéaire finie $\sum_{i \in J} \lambda_i e_i$, avec $(\lambda_i)_{i \in J} \in \mathbb{K}^J$ telle que

$$||x - \sum_{i \in J} \lambda_i e_i|| < \epsilon.$$

Comme $\{e_i,\ i \in I\}$ est orthognormée, et comme $< x, e_i >= 0$ pour tout $i \in J$, on a

$$||x - \sum_{i \in J} \lambda_i e_i||^2 = ||x||^2 + \sum_{i \in J} |\lambda_i|^2.$$

Donc $||x|| < \sqrt{\epsilon}$, pour tout $\epsilon > 0$. Nécessairement, $x = 0$. □

Corollaire 4.13. *Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace de Hilbert séparable, et $\{e_i,\ i \in I\}$ une base hilbertienne de $(H, < \cdot, \cdot >)$. Alors*

- *Soit* $\dim H < +\infty$*, auquel cas I est de cardinal* $\dim H$*.*
- *Soit* $\dim H = +\infty$ *et I est dénombrable.*

4.2. **Décomposition de Fourier.** Dans cette section, $(H, < \cdot, \cdot >)$ désigne un espace de Hilbert et l'on suppose qu'il existe $\{e_i,\ i \in I\}$ une base hilbertienne de $(H, < \cdot, \cdot >)$.

Définition 4.14. On définit, pour tout $i \in I$, le i-ème coéfficient de Fourier $c_i(x)$ de x par rapport à $\{e_i,\ i \in I\}$ en posant

$$c_i(x) :=< x, e_i > .$$

Posons, pour tout $J \subset I$ sous-ensemble fini de I, $E_J := \mathrm{Vect}\,\{e_j,\ j \in J\}$. On peut reformuler un résultat déjà vu :

Proposition 4.15. *Pour tout $x \in H$, la projection orthogonale de x sur E_J est donnée par*

$$p_{E_J}(x) = \sum_{j \in J} c_j(x) e_j.$$

On a donc

$$|| \sum_{j \in J} c_j(x) e_j ||^2 \leqslant ||x||^2,$$

soit

$$\sum_{j \in J} | < x, e_j > |^2 \leqslant ||x||^2.$$

Par passage à la limite, on obtient l'inégalité de Bessel :

Proposition 4.16 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonormée dénombrable de H. Alors*

$$\forall x \in H,\ \sum_{j \in \mathbb{N}} | < x, f_j > |^2 \leqslant ||x||^2.$$

Corollaire 4.17. *Supposons que $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ soit une famille orthonormée dénombrable de H. Alors la série*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_j(x) e_j$$

converge dans H.

Démonstration. D'après l'inégalité de Bessel, la série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |c_j(x)|^2$$

est convergente, donc de Cauchy. Mais pour tout $n, m \in \mathbb{N}^2$, $n < m$,

$$|| \sum_{j=n}^{m} c_j(x) e_j ||^2 = \sum_{j=n}^{m} |c_j(x)|^2$$

et donc la suite $(\sum_{j=0}^{n} c_j(x) e_j)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H. Comme H est complet, on en déduit le résultat. □

On peut enfin énoncer le théorème de développement dans une base hilbertienne :

Théorème 4.18. *Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.*

i) *Si $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $(H, < \cdot, \cdot >)$, alors*

$$\forall x \in H,\ x = \sum_{i=0}^{+\infty} < x, e_i > e_i. \tag{24}$$

ii) *Réciproquement, si $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est orthonormée, et si (24) est vérifiée, alors $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $(H, < \cdot, \cdot >)$.*

iii) *Si $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $(H, < \cdot, \cdot >)$, alors on a l'égalité de Plancherel :*

$$\forall x \in H,\ ||x||^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} | < x, e_i > |^2 \tag{25}$$

et l'égalité de Parseval :

$$\forall x, y \in H^2,\ < x, y > = \sum_{i=0}^{+\infty} < x, e_i > \overline{< y, e_i >}. \tag{26}$$

iv) *Réciproquement, si $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est une famille de vecteurs unitaires de H, et si (25) est vérifiée, alors $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $(H, < \cdot, \cdot >)$.*

Démonstration. On procède point par point, en suivant les notations de l'énoncé du théorème.
1. Preuve de i). On a

$$H = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}$$

où l'on a posé

$$E_n = \text{Vect}\{e_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Soit $x \in H$ et soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on peut fixer $x_n \in E_n$ avec

$$||x_n - x|| < \epsilon.$$

Or pout tout $n \geqslant \mathbb{N}$,

$$||x - p_{E_n}(x)|| \leqslant ||x_n - x||.$$

On a donc montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pout tout $n \geqslant N$,

$$||x - \sum_{j=0}^{n} < x, e_j > e_j|| < \epsilon,$$

ce qui prouve i).
2. Preuve de ii). La convergence de la série dans l'égalité (24) prouve que la famille $\{e_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ est totale. Comme elle est orthonormée par hypothèse, c'est une base hilbertienne.
3. Preuve de iii). Soit $(x, y) \in H^2$. D'après i), et par continuité de la norme, on a

$$||x||^2 = || \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} < x, e_i > e_i||^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} | < x, e_i > |^2$$

où l'on a utilisé la relation de Pythagore dans la dernière égalité. De même, la continuité du produit scalaire donne

$$< x, y >= \lim_{n\to+\infty} < \sum_{i=0}^{n} < x, e_i > e_i, \sum_{i=0}^{n} < y, e_i > e_i >= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} < x, e_i > \overline{< y, e_i >}.$$

4. Preuve de iv). Si $\{e_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ est unitaire et vérifie l'égalité de Plancherel, on a en particulier, avec $x = e_i$:

$$\forall i \in \mathbb{N},\ ||e_i||^2 = ||e_i||^2 + \sum_{j\neq i} | < e_i, e_j > |^2$$

et donc pour tout $i, j \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j$, on a $< e_i, e_j >= 0$. La famille $\{e_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ est donc orthnormée. En particulier, pour $x \in H$ et $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} < x, e_k > e_k$ est la projection orthogonale de x sur Vect $\{e_k,\, k \leqslant n\}$. Donc

$$||x - \sum_{k=0}^{n} < x, e_k > e_k||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=0}^{n} | < x, e_k > |^2.$$

Par hypothèse, le terme de droite tend vers zero, et donc $\{e_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ vérifie (24). Par ii), c'est une base hilbertienne. □

On a également unicité du développement dans une base hilbertienne donnée, comme en dimension finie :

Proposition 4.19. *Soit $\{e_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert séparable $(H, < \cdot, \cdot >)$. Si pour $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i$ converge vers $x \in H$ alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a*

$$\lambda_i =< x, e_i > .$$

Démonstration. Soit $i \in \mathbb{N}$. La suite $(< \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k, e_i >)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à λ_i à partir du rang i. Par continuité du produit scalaire, elle converge vers $< x, e_i >$, d'où le résultat. □

Du développement dans une base hilbertienne donnée, on déduit le théorème suivant, qui sera démontré en TD :

Théorème 4.20 (Théorème de Riesz-Fischer)**.** *Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Alors $(H, < \cdot, \cdot >)$ est isométriquement isomorphe à $l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$.*

En dimension finie, le choix d'une base orthonormale permet d'identifier un espace euclidien (resp. hermitien) à l'espace $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) muni de son produit standard. Le théorème de Riesz-Fischer est un analogue en dimension infinie, ou le modèle standard est $l^2_{\mathbb{N}}$.

5. **Séries de Fourier**

On va appliquer la théorie des espaces de Hilbert à l'étude des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$. Quitte à dilater l'espace des paramètres (c'est à dire faire un changement de variable), on pourra se restreindre aux fonctions 2π-périodiques, identifiées aux fonctions sur le cercle S^1. On dénote la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ par μ.

5.1. **Définitions et propriétés élémentaires.** On commence par introduire quelques espaces de fonctions étudiées dans cette section. On pose

$$\mathcal{C}^0(S^1) := \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) = f(x)\},$$

que l'on munit de la norme uniforme $|| \cdot ||_\infty$, définie par

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(S^1),\ ||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

On rappelle

Proposition 5.1. *L'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0(S^1), || \cdot ||_\infty)$ est un espace de Banach.*

Exercice 5.2. Démontrer la proposition précédente.

On introduit également, pour $p \in \{1, 2\}$:

$$\mathcal{L}^p(S^1) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \text{Lebesgue mesurable}\ , 2\pi\ \text{périodique}\ ,\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \, d\mu < +\infty\},$$

$$L^p(S^1) := \mathcal{L}^p(S^1)/ \sim,$$

Où la relation d'équivalence $\sim$ est définie par

$$f \sim 0 \Leftrightarrow f = 0\ \mu - \text{p.p.}$$

Pour alléger les notations, on dénotera la classe de $f \in \mathcal{L}^p(S^1)$ par f. On introduit la norme L^p :

$$\forall f \in L^p(S^1),\ ||f||_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On renvoit au cours d'intégration pour une démonstration de la proposition suivante :

Proposition 5.3. *L'espace vectoriel normé $(L^p(S^1), || \cdot ||_p)$, pour $p \in \{1, 2\}$, est complet.*

On rappelle[5] que $L^2(S^1)$ est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire

$$\forall f, g \in L^2(S^1),\ < f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\, \overline{g}\, d\mu$$

et que la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ définie par $e_n(t) = e^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ est une base hilbertienne de $(L^2(S^1), < \cdot, \cdot >)$. On a des injections continues :

Lemme 5.4. *Les applications $\mathcal{C}^0(S^1) \to L^p(S^1)$, pour $p \in \{1, 2\}$, qui associent à toute fonction de $\mathcal{C}^0(S^1)$ leur classe, sont des injections continues.*

Démonstration. Cet opérateur est clairement linéaire, et injectif car si une fonction est nulle $\mu - p.p$ et continue, elle est identiquement nulle. C'est un opérateur borné de norme 1. $\square$

On a également :

[5] Voir la feuille de TD 4

Proposition 5.5. *Si $f \in L^2(S^1)$, alors $f \in L^1(S^1)$ et l'application obtenue $L^2(S^1) \hookrightarrow L^1(S^1)$ est une injection continue.*

Démonstration. Soit $f \in L^2(S^1)$. Comme $[-\pi, \pi]$ est compacte, la fonction constante $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ égale à 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$ est dans $L^2(S^1)$. Par Cauchy-Schwarz,

$$||f||_1 = (< |f|, \mathbf{1}_{\mathbb{R}} >) \leqslant ||f||_2 \, ||\mathbf{1}_{\mathbb{R}}||_2.$$

L'injection $L^2(S^1) \hookrightarrow L^1(S^1)$ est donc bornée. □

On pose également pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{C}^k(S^1) := \mathcal{C}^0(S^1) \cap \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite $\mathcal{C}^k$ par morceaux si il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que :

i) les restrictions $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$,

ii) pour tout $j \in \{0, \ldots, k\}$, la j-ème dérivé $f^{(j)}$ admet une limite à gauche et à droite en x_i, pour $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Remarque 5.6. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, connaître f revient à connaître sa restriciton à $[-\pi, \pi]$. On peut alors parler de fonction régulière par morceaux et périodique sur $\mathbb{R}$.

On pose enfin

$$\mathcal{C}^k_m(S^1) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ \mathcal{C}^k \text{ par morceaux et } 2\pi - \text{périodique } \}.$$

Remarque 5.7. Si l'on munit l'espace $\mathcal{C}^0_m(S^1)$ de la norme uniforme, les injections $\mathcal{C}^0_m(S^1) \hookrightarrow L^p(S^1)$ pour $p \in \{1, 2\}$ sont également continues.

On va introduire les coefficients de Fourier pour les fonctions de $L^1(S^1)$.

Définition 5.8. Soit $f \in L^1(S^1)$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le n-ème coefficient de Fourier $c_n(f)$ de f est défini par

$$c_n(f)) =< f, e_n >:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, e^{-int} \, d\mu(t).$$

On note que ces coefficients sont bien définis par intégrabilité de f, ce qui donne un sens au "produit scalaire" $< f, e_n >$ (f est supposée seulement dans $L^1(S^1)$). On liste ici quelques propriétés élémentaires des coefficients de Fourier.

Lemme 5.9. *Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(S^1)$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit $g \in \mathcal{C}^0_m(S^1)$ par $g(t) = f(t + a)$, $t \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ c_n(g) = e^{ina} c_n(f).$$

Démonstration. Simple calcul reposant sur une translation de la variable d'intégration, la relation de Chasles pour l'intégrale et la périodicité de f. □

Lemme 5.10. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(S^1)$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = inc_n(f).$$

Démonstration. On calcul les coefficients de Fourier de f' à l'aide de ceux de f en intégrant par partie. La périodicité de f donne le résultat. □

Définition 5.11. Soit $f \in L^1(S^1)$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on appelle N-ème somme de Fourier de f le polynôme trigonométrique $P_N(f)$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{ikx}.$$

On va donner une écriture réelle des sommes de Fourier de $f \in L^1(S^1)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n(f)e^{-inx} + c_n(f)e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(e^{in(t-x)} + e^{-in(t-x)})\, d\mu(t).$$

Or

$$e^{in(t-x)} + e^{-in(t-x)} = 2\cos(n(t-x)) = 2\cos(nt)\cos(nx) + 2\sin(nt)\sin(nx),$$

d'où

$$c_n(f)e^{-inx} + c_n(f)e^{inx} = a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx),$$

avec

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \cos(nt)\, d\mu(t)$$

et

$$b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \sin(nt)\, d\mu(t).$$

On pose également

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, d\mu(t)$$

et l'on obtient l'écriture réelle :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_N(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx). \tag{27}$$

On a en particulier :

Lemme 5.12. *Si $f \in L^1(S^1)$ est à valeurs réelles,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 2\Re(c_n(f)) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = -2\Im(c_n(f)).$$

Enfin,

Lemme 5.13. *Si $f \in L^1(S^1)$ a un représentant*

- *paire sur $]-\pi,\pi[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$,*
- *impaire sur $]-\pi,\pi[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.*

Un intérêt des séries Fourier est de décomposer un signal périodique en somme de signaux plus simples. Il s'agit de donner un sens précis à la décomposition, c'est à dire comparer la série donnée par les sommes de Fourier partielles à la fonction initialle. On va tout d'abord étudier la convergence dans $L^2(S^1)$.

5.2. **Théorie L^2.** On résume ici un résultat de la section précédente, la décomposition dans une base hilbertienne, appliqué à la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Théorème 5.14. *Soit $f \in L^2(S^1)$.*

i) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $P_N(f)$ est la projection orthogonale dans $(L^2(S^1), <\cdot,\cdot>)$ de f sur l'espace* $\mathrm{Vect}\{e_n,\ |n| \leqslant N\}$.

ii) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité de Bessel :*

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, d\mu.$$

iii) *L'égalité de Parseval est vérifiée :*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 := \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, d\mu.$$

iv) *La suite de sommes partielles $(P_N(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $(L^2(S^1), ||\cdot||_2)$.*

Remarque 5.15. Les résultats précédants n'impliquent pas que $(P_N(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ pour un x donné. D'ailleurs, pour $f \in L^2(S^1)$, $f(x)$ n'est à priori pas défini.

Corollaire 5.16. *Soit $f \in L^2(S^1)$. Alors*

$$\lim_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0.$$

Démonstration. D'un côté, on a par la formule de Parseval

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N}^{N} |c_n(f)|^2 - \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N+1}^{N-1} |c_n(f)|^2 = ||f||_2^2 - ||f||_2^2 = 0.$$

D'autre part,

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N}^{N} |c_n(f)|^2 - \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N+1}^{N-1} |c_n(f)|^2 = \lim_{N \to +\infty} |c_N(f)|^2 + |c_{-N}(f)|^2.$$

□

Corollaire 5.17 (Riemann-Lebesgue)**.** *Soit $g \in L^2([a,b])$. On pose, pour $n \in \mathbb{Z}$,*

$$I_n := \int_a^b g(t)\, e^{int} \, d\mu(t),$$

$$J_n := \int_a^b g(t)\ \cos(nt) \, d\mu(t)$$

et

$$K_n := \int_a^b g(t)\ \sin(nt) \, d\mu(t).$$

Alors

$$\lim_{|n| \to +\infty} I_n = \lim_{|n| \to +\infty} J_n = \lim_{|n| \to +\infty} K_n = 0.$$

Démonstration. Comme $J_n = \frac{1}{2}(I_n + I_{-n})$ et $K_n = \frac{1}{2i}(I_n - I_{-n})$, il suffit de traiter le cas de I_n.
Premier cas : $b - a < 2\pi$. On défini alors $f \in L^2(S^1)$ par

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) = g(t),\ \forall t \in]b, a+2\pi[,\ f(t) = 0,$$

que l'on étend par périodicité. On remarque alors que $I_n = c_n(f)$, et l'on conclut par le corollaire précédent.
Deuxième cas : $b - a \geqslant 2\pi$. On découpe alors $[a,b]$ en un nombre fini d'intervalles de longueur strictement plus petite que 2π, et on applique le permier cas sur chacun de ces intervalles. □

5.3. **Convergence simple, uniforme.** On souhaite désormais donner un sens à la quantité

$$\lim_{N\to+\infty} P_N(f)(x)$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.18. *Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et définissons pour $n \in \mathbb{N}$ la série trigonométrique $S_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ de $L^2(S^1)$. Si $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fontion $S : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, alors nécessairement, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N = P_N(S)$.*

Autrement dit, si une série trigonométrique converge uniformément, elle est la série de Fourier de sa somme. En terme de convergence uniforme, les seules séries trigonométriques qui existent sont des séries de Fourier.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour $N \geqslant |n|$, on a $c_n =< S_N, e_n >= c_n(S_N)$. D'autre part, $(S_N(x)e^{-inx})_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $S(x)e^{-inx}$ sur $[-\pi,\pi]$. Donc

$$c_n = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)\, e^{-inx}\, d\mu(x) = c_n(S).$$

□

Corollaire 5.19. *Soit $f \in L^2(S^1)$. Si la limite $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)| < +\infty$ est finie, alors la classe de f admet un représentant continu limite uniforme de ses sommes partielles de Fourier.*

Démonstration. Par hypothèse sur $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$, la suite des sommes partielles $(P_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0(S^1), ||\cdot||_\infty)$. Cet espace est complet, donc $(P_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue g. D'aprés la proposition précédente, $P_n(f) = P_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par injection continue de $\mathcal{C}^0(S^1)$ dans $L^2(S^1)$, $(P_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $L^2(S^1)$. Par unicité de la limite, $f = g$ dans $L^2(S^1)$. □

Le théorème suivant existe dans une version plus générale (L^1_{loc} pour les intimes). On en démontre une version quelque peu allégée. Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0_m([a,b])$ et $x \in [a,b]$ on posera $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$) la limite de f à droite en x (resp. à gauche en x).

Théorème 5.20 (Théorème de Dirichlet)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^1_m(S^1)$. Alors $(P_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{N\to+\infty} P_N(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)).$$

Remarque 5.21. On verra en TD que si l'on suppose de plus que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, alors les sommes de Fourier partielles $(P_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Le reste de cette section est dédié à la preuve du théorème de Dirichlet. On introduit au passage des outils, le produit de convolution et le noyau de Dirichlet, qui ont un intérêt indépendamment du théorème.

Définition 5.22. Soit $f, g \in \mathcal{C}^0_m(S^1)$. Le produit de convolution de f et g est la fonction $f * g$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(x-t)\, d\mu(t).$$

Remarque 5.23. Le produit de convolution n'est pas toujours pondéré (ici par $\frac{1}{2\pi}$), et existe aussi sur d'autres ensembles de définition (ici $[-\pi, \pi]$).

La preuve de la proposition suivante sera vue en TD.

Proposition 5.24. *Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(S^1)$ et $g \in \mathcal{C}^0(S^1)$. Alors $f * g = g * f$ et $f * g \in \mathcal{C}^0(S^1)$.*

Définition 5.25 (Noyau de Dirichlet)**.** Soit $N \in \mathbb{N}$. On appelle N-ème noyau de Dirichlet la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}.$$

La preuve du lemme suivant est laissée au lecteur :

Lemme 5.26. *Le noyau de Dirichlet vérifie les propriétés suivantes, pour tout $N \in \mathbb{N}$:*

i)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N\, d\mu = 1,$$

ii)
$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z},\ D_N(t) = \frac{\sin((2N+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})},$$

iii)
$$\forall t \in 2\pi\mathbb{Z},\ D_N(t) = 2N+1.$$

Le lien entre les sommes partielles de Fourier et le noyau de Dirichlet est donné par le produit de convolution :

Lemme 5.27. *Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(S^1)$. Alors*

$$\forall N \in \mathbb{N},\ P_N(f) = D_N * f.$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P_N(f)(x) &= \sum_{k=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, d\mu(t)\right) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-t)}\right) d\mu(t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_N(x-t)\, d\mu(t) \\
&= f * D_N(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Preuve du théorème de Dirichlet. Il suffit de montrer le résultat pour $x = 0$, le cas général s'en déduit par translation.
Premier cas : f continue en 0. Dans ce cas,

$$f(0^+) = f(0^-) = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = f(0).$$

Il s'agit donc de montrer que $\lim_{N\to+\infty} P_N(f)(0) = f(0)$. On utilise les lemmes 5.27 et 5.26 :

$$\begin{aligned} P_N(f)(0) - f(0) &= D_N * f(0) - f(0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, f(-t)\, d\mu(t) - f(0)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, (f(-t) - f(0))\, d\mu(t). \end{aligned}$$

On définit alors la fonction 2π-périodique $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$h(0) = 0 \text{ et } \forall t \in [-\pi, \pi]\backslash\{0\},\ h(t) = \frac{f(-t) - f(0)}{\sin(\frac{t}{2})}.$$

On va montrer que h est bien définie et est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On aura par ailleurs, d'après le lemme 5.26 :

$$P_N(f)(0) - f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((2N+1)\frac{t}{2})\, h(t)\, d\mu(t). \tag{28}$$

Comme f est $\mathcal{C}^1$ par morceau et continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $[0, \delta]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \delta]$. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $t > 0$ on peut fixer $c_t \in]-t, 0[$ tel que $f(-t) - f(0) = -tf'(c_t)$ et donc tel que $h(t) = -f'(c_t)\frac{t}{\sin(\frac{t}{2})}$. Comme f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, f' admet une limite à gauche en 0. D'où $\lim_{t\to 0} f'(c_t) = f'(0^-)$ et $\lim_{t\to 0} h(t) = -2f'(0^-)$. On raisonne de même en 0^+ et on en déduit que h est continue par morceau, et donc dans l'espace $L^2(S^1)$. De l'équation (28) on déduit

$$P_N(f)(0) - f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(Nt)\cos(\frac{t}{2})\, h(t)\, d\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(Nt)\sin(\frac{t}{2})\, h(t)\, d\mu(t).$$

Les fonctions $t \mapsto \cos(\frac{t}{2})h(t)$ et $t \mapsto \sin(\frac{t}{2})h(t)$ étant dans $L^2(S^1)$, par le lemme de Riemman-Lebesgue on en déduit que $\lim_{N\to+\infty} P_N(f)(0) = f(0)$.
Deuxième cas : f discontinue en 0. On introduit alors la fonction f_0 définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{(f(x) + f(-x))}{2} & \text{si} \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{(f(0^+) + f(0^-))}{2} & \text{si} \quad x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

et la fonction f_1 définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{(f(x) - f(-x))}{2} & \text{si} \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si} \quad x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Par construction $f = f_0 + f_1$ en dehors de $2\pi\mathbb{Z}$ et par hypothèse f_0 et f_1 appartiennent à l'espace $\mathcal{C}^1_m(S^1)$. Mais alors

$$\begin{aligned} P_N(f)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, f(-t)\, d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, (f_0(-t) + f_1(-t))\, d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, f_0(-t)\, d\mu(t) \end{aligned}$$

car D_N est paire et f_1 est impaire. Enfin, f_0 est continue en 0 et on se ramène au premier cas pour conclure. $\square$

6. Transformée de Fourier

On a vu dans la section précédente que les séries de Fourier permettent de décomposer les fonctions périodiques en séries trigonométriques. On a par exemple pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue, périodique de période $T > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\frac{2\pi}{T}x}, \tag{29}$$

où ici

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-2i\pi \frac{n}{T} t}\, dt. \tag{30}$$

Cette décomposition permet de remplacer le signal périodique f par des harmoniques, les fonctions $c_n(f)e^{in\frac{2\pi}{T}x}$, et d'obtenir par exemple son spectre de fréquences (donné par les amplitudes, ou modules des coefficiens de Fourier, en fonction de la fréquence). On souhaite étendre ce procédé aux fonctions non-périodiques sur $\mathbb{R}$. L'idée initiale est qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut être vue comme une fonction de période infinie. L'ensemble des fréquences d'une fonction T périodique est $\{\frac{n}{T}, n \in \mathbb{N}\}$. On remarque que cet ensemble "augmente" avec T (comparer les cas T et $2T$), et quand $T \to +\infty$, cet ensemble couvre toutes les fréquences possible. On passe alors d'un ensemble discret à un ensemble continu de fréquences, ce qui motive le passage d'une série à une intégrale. Quand on fait tendre T vers $+\infty$, d'un point de vue heuristique, on voudra remplacer la formule (29) par la formule suivante (on fait un changement de variable $d\xi = \dfrac{dn}{T}$) :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_\xi(f)\, e^{2i\pi\xi x}\, T d\xi.$$

Les "coefficients de Fourier" $c_\xi(f)$ seront obtenu en faisant tendre T vers $+\infty$ dans la formule (30), ce qui donnera

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi\xi t}\, dt\right) e^{2i\pi\xi x}\, d\xi.$$

On introduira alors la transformée de Fourier de f :

$$\xi \mapsto \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi\xi t}\, dt$$

qui jouera le rôle des coefficients de Fourier pour les fonctions réelles non-nécessairement périodiques. Le but de cette section est de rendre ces arguments rigoureux, et de montrer que sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier est une isométrie. On comparera ce résultat au théorème de Riesz-Fischer (Théorème 4.20) qui donnait en particulier une isométrie via l'application $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.

6.1. **Définition de la transformée de Fourier.** On introduit les espaces $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in \{1, 2\}$:

$$\mathcal{L}^p(R) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \text{ Lebesgue mesurable },\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p\, d\mu < +\infty\},$$

ainsi que

$$L^p(R) := \mathcal{L}^p(R)/\sim,$$

où la relation d'équivalence $\sim$ est définie par

$$f \sim 0 \Leftrightarrow f = 0 \; \mu - \text{p.p.}$$

Pour alléger les notations, on dénotera la classe de $f \in \mathcal{L}^p(R)$ par f. On introduit le produit scalaire sur L^2 :

$$\forall f, g \in L^2(R), \; < f, g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f \, \overline{g} \, d\mu,$$

et la norme $|| \cdot ||_1$ sur $L^1(\mathbb{R})$:

$$\forall f \in L^1(R), \; ||f||_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| \, d\mu,$$

On renvoit au cours d'intégration pour une démonstration de la proposition suivante :

Proposition 6.1. *Les espaces* $(L^2(\mathbb{R}), < \cdot, \cdot >)$ *et* $(L^1(\mathbb{R}), || \cdot ||_1)$ *sont complets.*

On va commencer par introduire la transformée de Fourier sur l'espace $L^1(\mathbb{R})$:

Définition 6.2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \; \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \, e^{-2i\pi\xi x} \, d\mu(x). \tag{31}$$

Remarque 6.3. On utilisera parfois aussi la notation $\mathcal{F}(f)$ pour la transformée de Fourier.

Proposition 6.4. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Sa transformée de Fourier est bien définie, continue et bornée par* $||f||_1$.

On verra des exemples classiques de transformées de Fourier en TD.

Remarque 6.5. La transformée de Fourier induit donc un opérateur linéaire continu :

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & (L^1(\mathbb{R}), || \cdot ||_1) & \to & (\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), || \cdot ||_\infty) \\ & f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

Démonstration. Il est claire que $\hat{f}$ ne dépend pas du choix de représentant de $f \in L^1(\mathbb{R})$, et que c'est une fonction bornée par $||f||_1$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$ et $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers ξ. La suite de fontions mesurables $x \mapsto f(x) \, e^{-2i\pi\xi_n x}$ converge simplement vers $x \mapsto f(x) \, e^{-2i\pi\xi x}$. Par ailleurs, on a l'estimation uniforme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; |f(x) \, e^{-2i\pi\xi_n x}| \leqslant |f(x)|,$$

et la fonction f est intégrable. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient $\lim_{n \to +\infty} \hat{f}(\xi_n) = f(\xi)$ et $\hat{f}$ est bien continue. □

Remarque 6.6. On rappelle ici si nécessaire l'énoncer du théorème de convergence dominée. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$. On suppose que

(1) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction mesurable f,
(2) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée par une fonction intégrable g, c'est à dire qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; |f_n(x)| \leqslant g(x).$$

Alors les éléments de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que f sont intégrables et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $(L^1(\mathbb{R}), || \cdot ||)$.

On a déjà remarqué que l'opérateur transformation de Fourier $\mathcal{F}$ était linéaire. On liste quelques autres propriétés utiles de cet opérateur :

Proposition 6.7. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Si f est dérivable et si $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors*

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\, \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Si la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f)$ est dérivable et

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \frac{d}{d\xi}\mathcal{F}(f)(\xi) = -2i\pi\, \mathcal{F}(g)(\xi).$$

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 6.8. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Si f est dérivable et si $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0.$$

Démonstration. On traite le cas de la limite en $+\infty$, le cas $-\infty$ étant identique. Comme f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a[6] pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt.$$

Mais alors comme $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, f admet une limite en $+\infty$:

$$l := \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt.$$

On va montrer que $l = 0$. Supposons par l'absurde que $l \neq 0$. Quitte à raisonner avec $-f$, on peut supposer $l > 0$. On peut donc fixer $\epsilon > 0$ tel que $l - \epsilon > 0$. Mais f converge vers l, donc il existe $R > 0$ tel que pour tout $x > R$, $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$. En particulier,

$$+\infty = \lim_{A\to+\infty} \int_R^A l - \epsilon\, dx < \lim_{A\to+\infty} \int_R^A f(t)\, dt,$$

ce qui contredit le fait que f soit intégrable. □

Preuve de la proposition 6.7. Supposons $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Alors par intégration par partie

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(\xi) &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f'(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} [f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}]_{-R}^{+R} + 2i\pi\xi \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\ e^{2i\pi x\xi}\, dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} (f(R)e^{-2i\pi R\xi} - f(-R)e^{+2i\pi R\xi}) + 2i\pi\xi\mathcal{F}(f)(\xi).
\end{aligned}$$

Par le lemme 6.8 on obtient

$$\mathcal{F}(\frac{d}{dx}f(x))(\xi) = 2i\pi\xi\, \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Si on suppose désormais que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a pour $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, \phi(x, h)\, dx$$

[6]Ceci est bien connu si f' est continue. Pour le cas $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, plus difficile, on renvoit à l'ouvrage de Rudin "Analyse réelle et complexe".

où l'on a posé

$$\phi(x,h) = \frac{e^{-2i\pi hx} - 1}{h}.$$

Les fonctions mesurables $\phi(\cdot, h)$ convergent vers la fonction mesurable $x \mapsto -2i\pi x$ quand h tend vers 0. Par ailleurs, on a une estimation uniforme :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\phi(x,h)| \leqslant |x|.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue[7], on a par passage à la limite quand h tend vers 0 :

$$(\hat{f})'(\xi) = -2i\pi\, \mathcal{F}(g)(\xi),$$

en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$. □

On définit, pour $a \in \mathbb{R}$ et pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction translatée $\tau_a f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$:

$$\tau_a f : x \mapsto f(x-a).$$

On a alors :

Proposition 6.9. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-2i\pi a\xi}\, \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Si on pose pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x) = e^{2i\pi ax} f(x)$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(g)(\xi) = \tau_a \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi - a).$$

Enfin, si on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $f_a(x) := f(ax)$, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(f_a)(\xi) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f)(\frac{\xi}{a}).$$

Démonstration. Simples changements de variable. □

Définition 6.10. On définit le produit de convolution $f * g$ de deux fonctions $f, g \in L^1$ par la formule

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

Lemme 6.11. *Soit $(f,g) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors leur produit de convolution est bien défini et $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. La preuve repose sur le théorème de Fubini, et l'on renvoit au cours d'intégration, ou au livre "Analyse réelle et complexe" de Rudin pour une preuve détaillée. □

Remarque 6.12. On rappelle au besoin une version du théorème de Fubini que l'on utilisera par la suite. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue-mesurable. Alors les fonctions :

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, d\mu(y) \text{ et } y \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, d\mu(x)$$

sont Lebesgue-mesurables. On a égalité (dans $[0, +\infty]$) :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x,y)|\, d(\mu\times\mu)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, d\mu(y) \right) d\mu(x)$$

En particulier, si l'une des intégrales ci-dessus est finie, alors les trois le sont et f est intégrable.

[7] Le théorème de Lebesgue s'applique à priori pour des suites de fonctions. Dans notre cas, on a pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\hat{f}(\xi + h_n) - \hat{f}(\xi)}{h_n} = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} xf(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx$, ce qui permet de conclure.

Proposition 6.13. *Soient f, g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g).$$

Démonstration. Simple application du théorème de Fubini. $\square$

6.2. **Inversion.** On va démontrer une formule d'inversion pour la transformée de Fourier, analogue à la formule

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{inx}$$

du théorème de Dirichlet. Notre démonstration reposera sur la formule suivante :

Théorème 6.14 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction intégrable et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus :*

i) *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$ converge normalement sur $[a, b]$,*

ii) *La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{n}{2\pi})$ est absolument convergente .*

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{n}{2\pi})\, e^{inx}.$$

Dans l'énoncé ci-dessus, les sommes sur $\mathbb{Z}$ sont au sens des familles sommables.

Remarque 6.15. On rappelle qu'une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est sommable s'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_\epsilon \subset \mathbb{Z}$ fini tel que pour tout $J \subset \mathbb{Z}$ fini, si $J_\epsilon \subset J$, alors

$$|\sum_{i\in J} x_i \ - \ S| < \epsilon.$$

Dans ce cas, S est appelé la limite de la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Une telle limite est unique. Une série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ est dite absolument convergente si la famille $(|x_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. De manière équivalente, l'ensemble des sommes finies

$$\left\{\sum_{n\in J} |x_n|,\ J \subset \mathbb{Z}\,\text{fini}\right\}$$

est borné, auquel cas sa limite est sa borne supérieure. On généralise de même les notions de convergences simples, uniformes et normales au séries indéxées par $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Par hypothèse i), la fonction

$$x \mapsto F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et est 2π-périodique. Ces coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{array}{rcl}
\forall m \in \mathbb{Z},\ c_m(F) & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)\, e^{-imx}\, dx \\
& = & \\
& = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)\, e^{-im(x+2\pi n)}\, dx \\
& = & \\
& = & \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi n)\, e^{-im(x+2\pi n)}\, dx \\
& = & \\
& = & \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi n-\pi}^{2\pi n+\pi} f(t)\, e^{-imt}\, dt \\
& = & \\
& = & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-imt}\, dt \\
& = & \\
& = & \frac{1}{2\pi}\hat{f}(\frac{m}{2\pi}).
\end{array}$$

Dans la troisième égalité, on a utilisé la convergence normale. La quatrième s'obtient par changement de variable. Par hypothèse ii), et d'après le corollaire 5.19, F est somme uniforme de sa série de Fourier, d'où le résultat. $\square$

On en déduit une formule d'inversion pour la transformée de Fourier :

Théorème 6.16. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction intégrable et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus :*

i) *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)$ converge normalement sur $[a,b]$,*

ii) *pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + \frac{n}{2\pi})$ converge normalement sur $[a,b]$.*

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi\xi x} d\xi. \tag{32}$$

On posera pour $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\mathcal{F}}(g)(x) := \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\, e^{2i\pi\xi x} d\xi. \tag{33}$$

La formule (32) se lit alors :

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f) = f$$

pour toute fonction f satisfaisant les hypothèses du théorème.

Démonstration. Soit $\tau \in \mathbb{R}$. Par hypothèses i) et ii), on peut appliquer la formule sommatoire de Poisson à la fonction

$$g : x \mapsto f(x)e^{i\tau x}.$$

D'après les propriétés de la transformée de Fourier, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi + \frac{\tau}{2\pi}).$$

On obtient donc, après multiplication par $e^{i\tau x}$:

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)e^{-2i\pi\tau n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{n+\tau}{2\pi})\, e^{i(n+\tau)x}.$$

Le membre de gauche est une série de Fourier par rapport à la variable $2\pi\tau$, dont les coefficients $(2\pi f(x + 2\pi n))_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une série absolument convergente. En particulier, le coefficient c_0, égal à $2\pi f(x)$ est donné par

$$\begin{aligned} 2\pi f(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{n+\tau}{2\pi})e^{ix(n+\tau)}\, d\tau \\ &= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\frac{n-\frac{1}{2}}{2\pi}}^{\frac{n+\frac{1}{2}}{2\pi}} \hat{f}(\xi)e^{i2\pi\xi x}\, d\xi \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i2\pi\xi x}\, d\xi, \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque 6.17. On verra en TD que les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact sur $\mathbb{R}$ satisfont aux hypothèses du Théoréme 6.16.

On admettra la version plus générale de la formule d'inversion :

Théorème 6.18. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Si $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors la fonction g définie par*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$$

est continue, et $f = g$ pour presque tout x.

En particulier, si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est continue, et si $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

Corollaire 6.19. *Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si $\hat{f} = 0$, alors $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.*

Autrement dit, la transformée de Fourier est une injection de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

6.3. **Théorie L^2.** On commence par un analogue de la formule de Parseval dans le cadre de la transformation de Fourier :

Théorème 6.20 (Formule de Plancherel)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction intégrable et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus :*

i) *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$ converge normalement sur $[a, b]$,*

ii) *pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + \frac{n}{2\pi})$ converge normalement sur $[a, b]$.*

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi. \tag{34}$$

Remarque 6.21. L'égalité (34) est une égalité entre quantités finies. En effet, sous les hypothèses du théorème, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-2\pi N-\pi}^{2\pi N+\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+2\pi n)|^2 \, dx \leqslant 2\pi \sum_{n=-N}^{N} \sup_{[-\pi,\pi]} |f(\cdot + 2\pi n)|^2.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx$ est donc finie car par hypothèse $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{[-\pi,\pi]} |f(\cdot + 2\pi n)| < +\infty$ et donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{[-\pi,\pi]} |f(\cdot + 2\pi n)|^2 < +\infty$ (on rappelle que $l^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) \subset l^2_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$).

Démonstration. On utilise comme dans la preuve du Théorème 6.16 les coefficients de Fourier $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (2\pi f(x+2\pi n))_{n\in\mathbb{Z}}$ (par rapport à la variable $2\pi\tau$) de la fonction

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) e^{-2i\pi\tau n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{n+\tau}{2\pi}) \, e^{i(n+\tau)x}.$$

L'identité de Parseval donne

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+2\pi n)|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{n+\tau}{2\pi}) e^{ix(n+\tau)}|^2 \, d\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{n+\tau}{2\pi}) e^{inx}|^2 \, d\tau. \end{aligned}$$

On a donc avec la relation de Chasles pour l'intégrale

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx &= 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+2\pi n)|^2 \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{n+\tau}{2\pi}) e^{inx}|^2 \, d\tau \, dx. \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, on peut intervertir l'ordre d'intégration. Par ailleurs, la formule de Parseval nous donne également

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{n+\tau}{2\pi}) e^{inx}|^2 \, dx = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\frac{n+\tau}{2\pi})|^2,$$

donc

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx &= 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\frac{n+\tau}{2\pi})|^2 \, d\tau \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi. \end{aligned}$$

□

Remarque 6.22. On rappelle que l'espace des fonctions vérifiant les hypothèses du Théorème 6.20 n'est pas vide et contient les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact sur $\mathbb{R}$.

On va définir la transformée de Fourier sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ par densité. On utilisera un résultat que l'on admettra (on renvoit au cours d'intégration pour une preuve) :

Théorème 6.23. *L'ensemble des fonctions lisses à support compact $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}), ||\cdot||_p)$ pour $p \in \{1, 2\}$.*

Remarque 6.24. Attention, contrairement à l'espace des fonctions périodiques, il n'existe pas d'ordre entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$.

On va alors définir la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$:

Théorème 6.25. *Il existe un unique opérateur linéaire continu*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

dont la restriction à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ soit égal à la transformée de Fourier. Cet opérateur est une isométrie pour $||\cdot||_2$.

Démonstration. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. D'après le Théorème 6.23, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions lisses à support compact qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ (on sous-entend la norme $||\cdot||_2$). Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^2$, $f_n - f_m$ est en particulier $\mathcal{C}^2$ à support compact et satisfait donc les hypothèses du théorème de Plancherel (Théorème 6.20). Donc pour tout $n, m \in \mathbb{N}^2$,

$$||f_n - f_m||_2 = ||\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(f_m)||_2.$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ et la suite $(\mathcal{F}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc également de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$. Elle admet donc une limite $F \in L^2(\mathbb{R})$. Cette limite est indépendante de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie, car si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite de fonctions lisses à support compact qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$||\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(g_n)||_2 = ||f_n - g_n||_2$$

et donc par passage à la limite $F = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{F}(f_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{F}(g_n)$. On pose alors $\mathcal{F}(f) = F$, et $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est l'unique extension continue de la transformée de Fourier sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à $L^2(\mathbb{R})$. Par linéarité de la limite et de la transformée de Fourier, cet opérateur est linéraire. Enfin, un passage à la limite dans l'égalité

$$||f_n||_2 = ||\mathcal{F}(f_n)||_2$$

montre que $\mathcal{F}$ est une isométrie. □

L'opérateur étendu sera encore appelé transformée de Fourier. De la même manière, on peut étendre uniquement l'opérateur conjugué $\overline{\mathcal{F}}$ (cf équation (33)) en un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R})$. On a alors

Proposition 6.26. *Sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ on a la formule d'inversion :*

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = Id.$$

Démonstration. On sait que la formule d'inversion (32) est valable sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^2$ à support compact. Donc en particulier, sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on a

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}.$$

Le résultat s'obtient alors par densité et passage à la limite. □

Remarque 6.27. Attention, la formule (32) n'est pas valable sur $L^2(\mathbb{R})$. En effet elle suppose la fonction f intégrable, ce qui n'est pas assuré sur $L^2(\mathbb{R})$. Les opérateurs $\overline{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}$ ont été étendus à $L^2(\mathbb{R})$, ce qui ne signifie pas que la formule (31) soit valable sur $L^2(\mathbb{R})$.