Université de Brest
Master 1: Analyse Fonctionnelle
Année 2019-2020

Feuille TD 6 – Distributions

Exercice 1
Montrer la convergence suivante dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = \delta$$

Exercice 2
Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $g = \partial f$ au sens des distributions. Montrer que f est différentiable et que $g = f'$ au sens classique (indication : régulariser g et f par convolution).

Exercice 3
Soit $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On va chercher une primitive de v au sens des distributions.

1. Soit $\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi_0 dx =< 1, \phi_0 >= 1$. Montrer que l'on peut définir une application:
$$\begin{array}{cccc} \mu : & \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ & \phi & \mapsto & \int_x^{+\infty} (\phi(t) - < 1, \phi > \phi_0(t)) dt \end{array}$$

2. Montrer que pour toute constante C, l'application
$$u_C : \phi \mapsto < v, \mu(\phi) > + < C, \phi >$$
est une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Montrer que u_C est une primitive de v au sens des distributions.

4. Montrer que toute distribution primitive de v est obtenue de cette manière.

Exercice 4
Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que xH est solution de $\partial^2 v = \delta$.

2. En déduire une solution de l'équation $\partial^2 v = u$ avec $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de $\partial^2 v = u$ sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser l'exercice 3).

Exercice 5
Soit $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Le but de cet exercice est de montrer que la solution générale de l'équation

$$x^m u = v \qquad (E)$$

sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, est de la forme

$$u = w + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \partial^j \delta$$

où w est une solution particulière de (E) et δ la distribution de Dirac.

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\partial^j \phi(0) = 0$ pour $j = 0 \dots m-1$. À l'aide de la formule de Taylor, montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi = x^m \psi$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ ||\partial^k \psi||_\infty \leq C||\partial^{m+k}\phi||_\infty$$

2. Soit $\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi_0 = 1$ sur un voisinage de 0. Montrer que toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ admet une décomposition

$$\phi = \phi_0 \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^j}{j!} \partial^j \phi(0) + x^m \phi(\phi)$$

   où $\mu(\phi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $x^m u = 0$. Montrer qu'il existe des constantes c_j telles que

$$u = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \partial^j \delta.$$

4. Montrer que l'expression

$$< u, \phi > := < v, \mu(\phi) >,\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

   définit une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et que $x^m u = v$.

5. Conclure.

6. Déterminer toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $x^m u = \delta$.

Exercice 6
Soit s la fonction signe sur $\mathbb{R}$, définie par $s(x) = \frac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $s(0) = 0$.

1. Montrer que $\partial s = 2\delta$.

2. En déduire qu'il existe une constante c telle que

$$\hat{s} = -2iVP(\frac{1}{\xi}) + c\delta.$$

3. Montrer que $c = 0$.

4. En déduire que

$$\hat{H} = -iVP(\frac{1}{\xi}) + \pi\delta$$

   où H désigne la fonction de Heaviside.

Exercice 7
On considère l'équation différentielle

$$xu''(x) + (1 - x)u = 0 \qquad (E).$$

On pose W l'espace des solutions de (E) qui sont des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les transformées de Fourier des éléments de W vérifient une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre cette équation.
3. Quelle est la dimension de W?
4. Montrer que $W \subset L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.