Université de Brest
Master 1: Analyse Fonctionnelle
Année 2019-2020

Feuille TD 5 – Opérateurs compacts, spectre

Dans tous les exercices, $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ désignent des espaces de Banach. L'espace des opérateurs linéaires continues de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$ et l'espace des opérateurs compacts de E dans F est noté $\mathcal{K}(E,F)$. Si $T \in \mathcal{L}(E)$, on désigne par

- $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{R}\,,\, (T - \lambda Id) \text{ est inversible}\}$ l'ensemble résolvant de T,
- $\sigma(T) := \mathbb{R} \setminus \rho(T)$ le spectre de T,
- $EV(T) := \{\lambda \in \mathbb{R}\,,\, \ker(T - \lambda Id) \neq 0\}$ l'ensemble des valeurs propres de T.

Exercice 1
On suppose $\dim(E) = +\infty$. Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||u_n||_E = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ||T(u_n)||_F = 0$.

Exercice 2
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. On définit

$$V := \{\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n |u_n|^2 < +\infty\ \}.$$

On munit V du produit scalaire

$$(u,v) := \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n u_n v_n.$$

Montrer que $(V, (\cdot,\cdot))$ est un espace de Hilbert et que l'injection $V \subset l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ est compacte.

Exercice 3
Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$. On suppose $\mathrm{Im}T$ fermée.

1. Montrer que T est de rang fini.
2. Montrer de plus que si l'on suppose $\dim\ker T < +\infty$, alors $\dim E < +\infty$.

Exercice 4
Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $||T|| < 1$.

1. Montrer que $(Id - T)$ est inversible et

$$||(Id - T)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||T||}.$$

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n := Id + T + \ldots + T^{n-1}$. Montrer que
$$||S_n - (Id - T)^{-1}|| \leq \frac{||T||^n}{1 - ||T||}.$$

Exercice 5
Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > ||T||$. Montrer que
$$||Id + \lambda(T - \lambda Id)^{-1}|| \leq \frac{||T||}{|\lambda| - ||T||}.$$

2. Soit $\lambda \in \rho(T)$. Montrer que T et $(T - \lambda Id)^{-1}$ commutent et que
$$\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T)) \geq \frac{1}{||(T - \lambda Id)^{-1}||}.$$

3. On suppose que $0 \in \sigma(T)$. Montrer que
$$\sigma(T^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \, , \, \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

Dans la suite, on suppose $1 \in \rho(T)$ et on pose
$$U = (T + Id)(T - Id)^{-1} = (T - Id)^{-1}(T + Id).$$

4) Vérifier que $1 \in \rho(U)$ et donner une expression simple de $(U - Id)^{-1}$ en fonction de T.

5) Montrer que $T = (U + Id)(U - Id)^{-1}$.

6) Posons $f(t) = \frac{t+1}{t-1}$, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que
$$\sigma(U) = \{ f(\lambda) \, , \, \lambda \in \sigma(T) \} \, .$$

Exercice 6
Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose $T^2 = Id$. Montrer que $\sigma(T) \subset \{-1, +1\}$ et déterminer $(T - \lambda Id)^{-1}$ pour $\lambda \neq \pm 1$.

2. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tel que $T^n = Id$. Montrer que $\sigma(T) \subset \{-1, +1\}$ et déterminer $(T - \lambda Id)^{-1}$ pour $\lambda \neq \pm 1$.

3. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tel que $T^n = 0$. Montrer que $\sigma(T) = \{0\}$ et déterminer $(T - \lambda Id)^{-1}$ pour $\lambda \neq 0$.

4. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tel que $||T^n|| < 1$. Montrer que $(T - Id)$ est inversible et donner une expression de $(Id - T)^{-1}$ en fonction de $(Id - T^n)^{-1}$ et des itérés de T.

Exercice 7
On pose $E = l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$. On considère les opérateurs (*right shift and left shift*)

$$\begin{array}{cccc} S_r: & E & \to & E \\ & (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) & \mapsto & (0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} S_l: & E & \to & E \\ & (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) & \mapsto & (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots). \end{array}$$

1. Déterminer $||S_r||$ et $||S_l||$. Ces opérateurs sont-ils compacts?
2. Montrer que $EV(S_r) = \varnothing$.
3. Montrer que $\sigma(S_r) = [-1, 1]$.
4. Montrer que $EV(S_l) =]-1, 1[$.
5. Montrer que $\sigma(S_l) = [-1, 1]$.
6. Déterminer les adjoints de ces opérateurs.
7. Montrer que pour tout $\lambda \in]-1, 1[$, les espaces $\mathrm{Im}(S_r - \lambda Id)$ et $\mathrm{Im}(S_l - \lambda Id)$ sont fermés.
8. Montrer que les espaces $\mathrm{Im}(S_r \pm Id)$ et $\mathrm{Im}(S_l \pm Id)$ sont denses mais non fermés.
9. On introduit, pour $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornées, un opérateur de multiplication

$$\begin{array}{cccc} M: & E & \to & E \\ & (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) & \mapsto & (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots). \end{array}$$

   Déterminer $EV(S_r \circ M)$.
10. On suppose qu'il existe $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$. Montrer que $\sigma(S_r \circ M) = [-|\alpha|, |\alpha|]$.
11. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{2n} = a$ et $\alpha_{2n+1} = b$. Déterminer $\sigma(S_r \circ M)$.

Exercice 8
On pose $E = L^p([0, 1], \mathbb{R})$, pour $1 < p < +\infty$. On définit un opérateur

$$\begin{array}{cccc} T: & E & \to & E \\ & u & \mapsto & Tu(x) = \int_0^x u(t)dt. \end{array}$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{K}(E)$.
2. Déterminer $EV(T)$ et $\sigma(T)$.
3. Donner une formule explicite de $(T - \lambda Id)^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(T)$.
4. Déterminer l'adjoint de T.

Exercice 9

Soit $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, de norme $|| \cdot ||$. On pose $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.

1. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que pour toute base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de H,
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} ||Ae_i||^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} ||A^* f_i||^2.$$

2. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, la quantité
$$||A||_{\mathcal{HS}} := \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} ||Ae_i||^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
est indépendante du choix de la base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

3. Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, si $||A||_{\mathcal{HS}}$ est finie, on dit que A est un opérateur de Hilbert-Schmidt. On note $\mathcal{HS}(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H. Montrer que $\mathcal{HS}(H) \subset \mathcal{K}(H)$.