Université de Brest
Master 1: Analyse Fonctionnelle
Année 2019-2020

Feuille TD 3 – Espaces de Hilbert

Dans tous les exercices, H désigne un espace de Hilbert de produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et de norme $|| \cdot ||$. Si $K \subset H$ est un convexe fermé non vide, on dénote par p_K la projection orthogonale sur K.

Exercice 1
Soit $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$.

1. Montrer que la norme $|| \cdot ||_p$ ne satisfait pas la règle du parallèlogramme sur $L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. En déduire que $(L^p(\mathbb{R}^n), || \cdot ||_p)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 2
Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés convexes non-vides de H.

1. On suppose $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et d'intersection non vide. Montrer que pour tout $f \in H$, la suite des projections orthogonales $p_{K_n}(f)$ converge et identifier la limite.
2. On suppose $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Montrer que pour tout $f \in H$, la suite des projections orthogonales $p_{K_n}(f)$ converge et identifier la limite.

Exercice 3
Soit (X, μ) un espace mesuré et $h : X \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable. On pose

$$K := \{f \in L^2(X, \mu; \mathbb{R}) \, , \, |f| \leq h \, \mu - p.p.\}.$$

Montrer que K est un convexe fermé non-vide de $L^2(X, \mu; \mathbb{R})$ et déterminer p_K.

Exercice 4
Soit $(E, (\cdot, \cdot))$ un espace préhilbertien. Soit

$$\begin{array}{rccc} T: & E & \to & E^* \\ & u & \mapsto & (u, \cdot) \end{array}$$

1. Montrer que T est une isométrie linéaire.
2. L'application T est-elle surjective en général? (On rappelle que E^* est complet pour la norme d'opérateur).

Le but de l'exercice est de montrer que $\mathrm{Im}T$ est dense dans E^* et que $|| \cdot ||_{E^*}$ est une norme hilbertienne sur E^*.

1. Montrer que le produit scalaire sur E induit un produit scalaire (noté $(\cdot, \cdot)_T$) sur $\overline{\mathrm{Im}T}$.
2. Montrer que la norme induite par $(\cdot, \cdot)_T$ sur $\overline{\mathrm{Im}T}$ coincide avec $|| \cdot ||_{E^*}$.

3. Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $f \in \overline{\mathrm{Im} T}$,

$$f(x) = (f, T(x))_T.$$

4. Montrer que $\overline{\mathrm{Im} T} = E^*$.

5. En déduire que $(E^*, ||\cdot||_{E^*})$ est un espace de Hilbert.

6. Conclure que la complétion de E peut être identifiée avec E^*.

Exercice 5
Soit $F \subset H$ un sous-espace, muni de la norme induite par H. Soit G un espace de Banach, et $f \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer qu'il existe un opérateur $\tilde{f} \in \mathcal{L}(H, G)$ qui prolonge f (c'est à dire dont la restriction à F soit égale à f) et tel que

$$||\tilde{f}||_{\mathcal{L}(F,G)} = ||f||_{\mathcal{L}(H,G)}.$$

Exercice 6
Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, H)$. Montre que les assertions suivantes sont équivalentes:

i) T admet un inverse à gauche,

ii) Il existe $C > 0$ telle que $|x| \leq C||T(x)||$ pour tout $x \in E$.

Exercice 7
Soit $S \in \mathcal{L}(H)$. On suppose que pour tout $x \in H$, $< S(x), x > \geq 0$.

1. Montrer que $\ker S = (\mathrm{Im} S)^{\perp}$.

2. Montrer que $I + tS$ est bijectif pour tout $T > 0$.

3. Montrer que pour tout $f \in H$,

$$\lim_{t \to +\infty} (I + tS)^{-1}(f) = P_{\ker S}(f).$$

   (On pourra utiliser le théorème de Lax-Milgram).

Exercice 8
Soit $(e_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale de $H = L^2([0, 1])$, et soit $p \in H$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\int_0^t p(s) e_n(s) ds|^2 \leq \int_0^t |p(s)|^2 ds \tag{1}$$

2. En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |\int_0^t p(s) e_n(s) ds|^2 dt \leq \int_0^1 |p(t)|^2 (1 - t) dt \tag{2}$$

3. On suppose désormais que $(e_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base orthonormale de H. Montrer que (1) et (2) sont des égalités.

4. Réciproquement, on suppose que (2) est vérifiée et que $p \neq 0$ p.p. Montrer que $(e_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base orthonormale de H.