Université de Brest
Master 1: Analyse Fonctionnelle
Année 2019-2020

Devoir Maison – Topologie faible

Soit E un espace de Banach. On définit la *topologie faible* sur E comme étant la topologie la moins fine sur E qui rende toutes les applications de l'ensemble $\{f, f \in E^*\}$ continues (E^* désigne le dual topologique de E). Par opposition on appellera *topologie forte* la topologie usuelle sur E induite par sa norme.

Exercice 1
Soit E un espace de Banach.

1. Montrer que la topologie faible sur E est plus grossière que la topologie forte.
2. Montrer que la topologie faible est séparée.
3. Montrer qu'une base de voisinage de $x_0 \in E$ pour la topologie faible est donnée par les ensembles
$$\mathcal{V}(f_1, \dots f_k; \epsilon) := \{x \in E,\ |f_i(x - x_0)| < \epsilon,\ i = 1, \dots, k\},$$
où $\epsilon > 0$ et $f_1, \dots, f_k \in E^*$.
4. Montrer qu'en dimension finie, les topologies faible et forte sont les mêmes.

Exercice 2
Soit $C \subset E$ un convexe. Montrer que C est fermé pour la topologie faible si et seulement si C est fermé pour la topologie forte.

Exercice 3
Soit $A \subset E$ compact pour la topologie faible. Montrer que A est borné.

Exercice 4
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente vers $x \in E$ pour la topologie faible. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n := \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$. Montrer que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x.

Exercice 5
Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Le but de cet exercice est de démontrer que E muni de sa topologie faible n'est pas métrisable. On suppose, par l'absurde, qu'il existe une métrique d sur E qui induise la topologie faible.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{V}_k$ un voisinage de 0 pour la topologie faible tel que
$$\mathcal{V}_k \subset \{x \in E,\ d(0,x) < \frac{1}{k}\}.$$
On peut supposer que pour tout k, il existe $F_k \subset E^*$ fini tel que
$$\mathcal{V}_k = \mathcal{V}(F_k; \epsilon_k).$$
Posons
$$F := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k.$$
Montrer que que tout élément $g \in E^*$ est une combinaison linéaire finie d'éléments de F.

2. Notons que F est dénombrable, et posons $F = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$. On pose E_n l'espace vectoriel engendré par $\{f_i,\ i \leq n\}$. Montrer que pour tout n, E_n est fermé et de dimension finie, et que
$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

3. En déduire que E est de dimension finie. Conclure. (On pourra utiliser le lemme de Baire.)