Université de Brest
Master 1: Analyse Fonctionnelle
Année 2019-2020

Feuille TD 2 – Théorème de Hahn-Banach, Lemme de Baire et applications

Exercice 1
Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Soit $C \subset E$ un convexe ouvert contenant 0. On définit p la jauge de C par:

$$\forall x \in E,\ p(x) := \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in C\}.$$

1. On suppose de plus que C est symétrique ($-C = C$) et borné. Montrer p est une norme équivalente à $||\cdot||$.
2. On suppose dans la suite que $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ avec la norme $||\cdot||_\infty$. Soit
$$C := \{u \in E \mid \int_0^1 |u(t)|^2\, dt < 1\}.$$
Montrer que C est convexe, symétrique et $0 \in C$.
3. C est-il borné?
4. Calculer la jauge de C et montrer que c'est une norme sur E.
5. La jauge de C est-elle équivalente à $||\cdot||_\infty$?

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $C \subset E$ un convexe non-vide ne contenant pas 0. On va montrer qu'il existe un hyperplan qui sépare C et $\{0\}$.

1. Montrer qu'il existe une partie $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de C dense dans C.
2. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, C_n l'enveloppe convexe de $\{x_1, \ldots, x_n\}$:
$$C_n := \{\sum_{i=1}^n t_i x_i,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n t_i = 1\}.$$
Montrer que C_n est compacte et que $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} C_n$ est dense dans C.
3. Montrer qu'il existe $f_n \in E^*$ telle que $||f_n|| = 1$ et $\forall x \in C_n,\ < f_n, x > \geq 0$.
4. En déduite qu'il existe $f \in E^*$ telle que $||f|| = 1$ et $\forall x \in C_n,\ < f, x > \geq 0$.
5. Conclure.
6. Montrer que si A et B sont deux convexes disjoints non-vides de E, il existe un hyperplan qui sépare A et B.

Exercice 3
Soient E et F deux espaces de Banach et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose que pour tout $x \in E$, $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de F notée $T(x)$. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors $(T_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T(x)$ dans F.

Exercice 4
Soient E et F deux espaces de Banach et $a : E \times F \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire telle que pour tout $x \in E$, $y \mapsto a(x,y)$ est continue et pour tout $y \in F$, $x \mapsto a(x,y)$ est continue. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ |a(x,y)| \leq C||x||\ ||y||.$$

Exercice 5
Soit E un espace de Banach et $T : E \to E^*$ un opérateur linéaire tel que

$$\forall x \in E,\ < T(x), x > \geq 0.$$

Montrer que T est un opérateur borné.

Exercice 6
Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose T surjectif.

1. Soit M un sous ensemble de E. Montrer que $T(M)$ est fermé dans F si et seulement si $M + \ker T$ est fermé dans E.

2. En déduire que si M est fermé dans E et $\ker T$ est de dimension finie, alors $T(M)$ est fermé.

Soient E_1, E_2 deux espaces de Banach et $T_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$ deux applications linéaires continues. On suppose que

$$\mathrm{Im}T_1 \cap \mathrm{Im}T_2 = \{0\} \text{ et } \mathrm{Im}T_1 + \mathrm{Im}T_2 = F.$$

Montrer que $\mathrm{Im}T_1$ et $\mathrm{Im}T_2$ sont fermés.

Exercice 7
Soit E un espace de Banach, et posons $F = l^1$. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjectif. Montrer que T admet un inverse à droite, c'est à dire il existe $S \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $T \circ S = I_F$.

Exercice 8
Soient E et F deux espaces de Banach, de normes $||\cdot||_E$ et $||\cdot||_F$. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ d'image fermée et de noyau de dimension finie. Soit $|\cdot|$ une autre norme sur E telle que il existe $M > 0$ avec $|\cdot| \leq M||\cdot||_E$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ avec

$$\forall x \in E\,, ||x||_E \leq C(||Tx||_F + |x|).$$

Exercice 9
On va démontrer, à l'aide du lemme de Baire, qu'une limite simple f de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace métrique complet (X,d) est continue sur une partie dense de X. On pose pour cela, pour $k,n \in \mathbb{N}$,

$$F_{k,n} := \bigcap_{p,q\geq n} \{x \in X,\ d(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k}\}.$$

1. Montrer le corollaire suivant du lemme de Baire: si X est union dénombrable de fermés F_n, alors la réunion des intérieurs des F_n est un ouvert dense de X.

2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Omega_k := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Int}(F_{k,n})$$

   est un ouvert dense de X.

3. Montrer alors que pour tout $x \in \Omega_k$, il existe un voisinage V de x tel que pour tout $y \in V$, $d(f(x), f(y)) \leq \frac{3}{k}$.

4. Conclure en considérant l'intersection des Ω_k.