Université de Brest
Master 1: Analyse Fonctionnelle
Année 2019-2020

Feuille TD 1 – Rappels

Exercice 1
Montrer que les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 \left|f'(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Montrer que N est une norme.
2. Montrer que N et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 3
Déterminer dans chacun des cas, en le justifiant, si l'espace suivant est un espace de Banach:

1. L'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$.
2. L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.
3. L'espace $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$.
4. L'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||\cdot||_2$.

Donner des exemples de normes sur $\mathcal{C}^p([0,1],\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, qui rendent cet espace complet.

Exercice 4
Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que $L^q([0,1]) \subset L^p([0,1])$ et que cette injection est continue. Calculer sa norme d'opérateur.

Exercice 5
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Montrer que si F est complet, alors l'ensemble des applications linéaires continues $\mathcal{L}(E,F)$ est complet pour la norme d'opérateur.

Exercice 6
Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F sont deux espaces de Banach. Montrer que si il existe $\delta > 0$ tel que $||Tx|| \geq \delta||x||$ pour tout $x \in E$, alors l'image de T est un espace de Banach. De plus, T est un isomorphisme sur son image.

Exercice 7
Calculer la norme des opérateurs suivants:

- $X = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $Tf(x) = f(x)g(x)$ où $g \in X$.
- $X = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$ où $g \in X$ est une fonction qui ne s'annule qu'en $x = 1/2$.
- $X = l^2$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans X.
- $X = l^1$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans l^∞.
- X l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et $u : X \to \mathbb{R}$ l'application $u(x) = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Exercice 8

Soit $X = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ ; \ (1+x^2)|f(x)| \text{ soit bornée}\}$. On pose $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$. Vérifier que N est une norme, puis montrer que la forme linéaire suivante L est continue et calculer sa norme:

$$L : X \to \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \ .$$

Exercice 9

Montrer, sans utiliser le théorème de Riesz, que la boule unité fermée de $(\mathcal{C}^0[0,1], ||\cdot||_\infty)$ n'est pas compacte.

Exercice 10

Soit (Y, d) un espace métrique compact.

1. Montrer que l'espace des fonctions continues sur Y et à valeures complexes $C(Y, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel normé complet pour la norme infinie.
2. Montrer que toute fonction $K \in C(Y, \mathbb{C})$ est uniformément continue.

Soit (X, d) un espace métrique compact. On pose $Z = X \times [0,1]$ que l'on munit de la distance d_∞ définie par

$$d_\infty((x,t),(x',t')) = \max\{d(x,x'), |t-t'|\}.$$

On fixe une application continue $K \in C(Z, \mathbb{C})$. Pour tout $f \in C([0,1], \mathbb{C})$, on définit $u(f) : X \to \mathbb{C}$ par:

$$u(f)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt.$$

1. (a) Prouver que pour tout $f \in C([0,1], \mathbb{C})$, on a $u(f) \in C(X, \mathbb{C})$.
   (b) On pose $E = C([0,1], \mathbb{C})$ et $F = C(X, \mathbb{C})$, et l'on munit E et F de la norme $||\cdot||_\infty$. Montrer que l'application $u : f \mapsto u(f)$ appartient à $\mathcal{L}(E, F)$.
2. On suppose désormais que $X = [0,1]$.
   (a) Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que pour tout $|\lambda| < \kappa$, pour tout $g \in E$, il existe une unique fonction $f \in E$ telle que $f = g + \lambda u(f)$. On pourra utiliser le théorème du point fixe.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < \kappa$, où κ vérifie la propriété de la question 2)a). Montrer que

   $$\begin{array}{rccc} id_E - \lambda u : & E & \to & E \\ & f & \mapsto & f - \lambda u(f) \end{array}$$

   est linéaire et inversible.