Université de Bretagne Occidentale **Année 2008-2009**
Master 1 de Mathématiques

Probabilités 2 - Espérance conditionnelle
TD N.1

Rappels sur les tribus

R1. Soit $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille quelconque de tribus sur l'ensemble Ω. Montrer que $\mathcal{B} = \cap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ est aussi une tribu.

R2. Décrire la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par une partition finie $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_p\}$ de l'espace Ω. Déterminer les fonctions $\mathcal{F}$-mesurables.

R3. Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ modélisant le lancer indépendant de deux dés à 6 faces. Soit $X(i,j) = i + j$ la somme des deux dés. Décrire la tribu engendrée par X.

Exercices sur l'espérance conditionnelle

Pour les exercices 1 à 6 on considère une v.a. X positive ou intégrable, définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et une sous-tribu $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que $|E(X|\mathcal{C})| \le E(|X||\mathcal{C})$.

2. Si $\mathcal{F}$ est une sous-tribu de $\mathcal{C}$, montrer que $E(E(X|\mathcal{C})|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{F})$.

3. Montrer que $E(X|X) = X$ p.s.

4. Montrer que si $|X| \le c$ p.s., alors $|E(X|\mathcal{C})| \le c$ p.s. également.

5. Si $X = \alpha$ p.s., où α est une constante, montrer que $E(X|\mathcal{C}) = \alpha$ p.s.

6. Si X est positive montrer que $\{E(X|\mathcal{C}) = 0\} \subset \{X = 0\}$ et $\{E(X|\mathcal{C}) = +\infty\} \supset \{X = +\infty\}$ p.s.

7.* Soient X et Y des v.a. réelles indépendantes, et f une fonction borélienne telle que $f(X,Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose

$$g(x) = \begin{cases} E(f(x,Y)) & \text{si } |E(f(x,Y))| < \infty, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est borélienne et que $E(f(X,Y)|X) = g(X)$ (utiliser le théorème de Fubini).

8. Soit $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et supposons que $E(Y^2|X) = X^2$ et $E(Y|X) = X$. Montrer que $Y = X$ p.s. (calculer $E((Y-X)^2)))$.

9.* Soit Y une v.a. exponentielle de paramètre 1 (i.e., $P(Y > t) = e^{-t}$ pour $t > 0$). Soit $X = \min(Y, t)$. Calculer $E(Y|X)$ (reécrire $E(Yg(X))$ pour g mesurable bornée).

10. (Inégalité de Bienaymé-Chebyshev.) Montrer que si $X \in L^2$ et $a > 0$, on a $P(|X| \ge a|\mathcal{C}) \le \frac{E(X^2|\mathcal{C})}{a^2}$.

11. (Cauchy-Schwartz.) Si $X, Y \in L^2$ montrer que $E(XY|\mathcal{C})^2 \le E(X^2|\mathcal{C})E(Y^2|\mathcal{C})$.

12. Si $X \in L^2$, montrer que $E((X - E(X|\mathcal{C}))^2) \le E((X - E(X))^2)$.

13.* Soit Z une v.a. positive sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, avec $E(Z) = 1$. On définit une nouvelle probabilité Q sur le même espace en posant $Q(A) = E(1_A Z)$. Soit $\mathcal{C}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que $E_Q(X|\mathcal{C}) = \frac{E(XZ|\mathcal{C})}{E(Z|\mathcal{C})}$, pour toute v.a. bornée et $\mathcal{A}$ mesurable X. (Ici, $E_Q(X|\mathcal{C})$ désigne l'espérance conditionnelle relativement à la probabilité Q ; on utilise la convention $\frac{0}{0} = 0$.)

14.* (a) Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux tribus contenues dans $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$. On considère une v.a.r. Y telle que $E(|Y|) < +\infty$, et on suppose que les tribus $\sigma(\sigma(Y) \cup \mathcal{C}_1)$ et $\mathcal{C}_2$ sont indépendantes. Montrer que $E(Y|\mathcal{C}) = E(Y|\mathcal{C}_1)$ p.s. (On utilisera le fait que la tribu $\mathcal{C}$ est engendrée par la classe $\mathcal{C}_0 = \{C_1 \cap C_2 \colon C_1 \in \mathcal{C}_1, C_2 \in \mathcal{C}_2\}$, qui est stable par intersection finie et contient Ω.)

(b) Soit (X_i) une suite de v.a.r. indépendantes, équidistribuées, telles que $E(|X_i|) < +\infty$; on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer $E(X_1|S_n, S_{n+1}, \ldots)$.

15. (Coefficient de corrélation linéaire et rapport de corrélation.) Soient X et Y deux v.a. dans L^2 non constantes. On appelle *rapport de corrélation* de Y sur X le réel positif r tel que

$$1 - r^2 = \frac{\mathrm{Var}(Y - E(Y|X))}{\mathrm{Var}(Y)} = \frac{\|Y - E(Y|X)\|^2}{\|Y - E(Y)\|^2}.$$

(a) Interpréter géométriquement r ; montrer que $0 \leq r \leq 1$. Que peut-on dire si $r = 0$, si $r = 1$?

(b) Montrer que pour toute v.a. Z de L^2, X-mesurable, on a

$$\frac{\|Y - Z\|^2}{\|Y - E(Y)\|^2} \geq 1 - r^2.$$

(c) Déterminer les deux réels $\bar{a}$ et $\bar{b}$ tels que

$$\|Y - \bar{a} - \bar{b}X\|^2 = \min\{\|Y - a - bX\|^2 \colon a, b \in \mathbb{R}\}.$$

La v.a. $\bar{Y} = \bar{a} + \bar{b}X$ est la fonction *affine* de X la « plus proche » de Y au sens de la norme L^2. On note $\bar{Y} = L(Y|X)$ et on dit que $L(Y|X)$ est la *régression linéaire* de Y sur X. Vérifier que $E(Y - L(Y|X)) = 0$.

(d) Si ρ est le *coefficient de corrélation linéaire* de Y et de X, défini par $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$, montrer que

$$1 - \rho^2 = \frac{\|Y - L(Y|X)\|^2}{\|Y - E(Y)\|^2}.$$

Vérifier que $\rho^2 \leq r^2$. Interpréter.

(e) Montrer que $\rho^2 = r^2$ si et seulement si $E(Y|X) = L(Y|X)$ p.s.

(f) Montrer que si $\rho = \pm 1$, $Y = L(Y|X)$ p.s.

16. (Espérance conditionnelle pour un vecteur gaussien.) Soit (X, Y) un vecteur gaussien non dégénéré. Montrer que $E(Y|X)$ est de la forme $a + bX$ et calculer les constantes a et b, en utilisant le fait que le vecteur $(X, Y - (a + bX))$ est gaussien.