Université de Bretagne Occidentale
L3 Mathématiques parcours mathématiques
Analyse numérique et statistique 2008-2009

**Examen du mardi 26 mai 2009, 9h–12h**

**Exercice I.** Soient $x_1, x_2$ deux points de $[-1, 1]$ et $\lambda_1, \lambda_2$ deux réels. On considère la méthode d'intégration numérique

$$(\star) \qquad \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

1) Quelles conditions doivent vérifier $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ pour que $(\star)$ soit une méthode exacte sur
a) les fonctions constantes ?
b) les fonctions affines ?
c) les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ?

2) Parmi les méthodes exactes sur $\mathbb{P}_2$, une seule vérifie $x_1 = -x_2$.
a) Montrer que ce choix fournit une méthode exacte sur $\mathbb{P}_3$.
b) Pourrait-il y avoir d'autres méthodes exactes sur $\mathbb{P}_3$ ? Donner l'énnoncé du théorème du cours se rapportant à cette question.

3) Expliquer pourquoi en général on a intérêt à choisir une méthode d'intégration numérique d'ordre élevé. Quel est l'inconvénient en pratique ?

********************

**Exercice II.** On rappelle la forme générale d'un schéma de Runge-Kutta :

$$(RK) \begin{cases} y_{n,i} & = & y_n + h_n \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}), \quad i = 1, \ldots, q \\ y_{n+1} & = & y_n + h_n \sum_{j=1}^{q} b_j f(t_{n,j}, y_{n,j}) \end{cases}$$

avec $t_{n,j} = y_n + c_j h_n$. On considère le schéma de Runge-Kutta associé au tableau

$$(RK3) \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & -9/20 & 6/5 & 0 \\ \hline 1 & 1/9 & 1/3 & 5/9 \end{array}$$

1) a) Est-ce une méthode explicite ou implicite ? Quel est l'intérêt ?
b) Ecrire les équations associées à ce tableau.

2) On considère l'équation différentielle $(\sharp) \quad \begin{cases} y'(t) & = & t + y(t) \\ y(0) & = & \eta \end{cases}$
a) Ecrire le schéma numérique associé à $(RK3)$ et $(\sharp)$ sous la forme $y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$.
b) Résoudre l'équation $(\sharp)$.

3) Discuter en général les avantages et inconvénients apportés par le choix d'un pas $h_n$ petit.

**Exercice III.** On a pesé 30 poulpes mâles adultes pêchés au large des côtes Mauritiennes. On a obtenu les résultats suivants (en gramme) :
2900 ; 1500 ; 1700 ; 3500 ; 1500 ; 2000 ; 3400 ; 1400 ; 1400 ; 3400 ; 1400 ; 2300 ; 4400 ; 1600 ; 1900 ; 1500 ; 3000 ; 4400 ; 4500 ; 2800 ; 2700 ; 2200 ; 2400 ; 2400 ; 3000 ; 2800 ; 2600 ; 2300 ; 3000 ; 3900

On pourra utiliser que la moyenne et l'écart-type empirique des observations sont donnés respectivement par $\bar{x} = 2593$ et $s = 923$

1) a) Quel type de graphique peut-on utiliser pour résumer ce tableau de données ? Faire le graphique.
b) Les scientifiques supposent généralement que la répartition du poids des poulpes suit une loi normale de moyenne $\mu$ et de variance $\sigma^2$. Cette hypothèse vous semble-t'elle justifiée ?

2) Rappeler les définitions de $\bar{x}$ et $s$. Comment s'interprètent ces quantités ?

3) a) Donner un intervalle de confiance à 95% pour $\mu$. On détaillera précisemment le raisonnement mathématique qui permet de construire cet intervalle.
b) Quelle est la largeur de cet intervalle de confiance ? Combien de mesures faudrait-il effectuer pour obtenir un intervalle de confiance à 95% dont la largeur est inférieure à 100g ?

4) Il est généralement admis que le poids moyen des poulpes mâles adultes est de 3000g. Est-ce que cette hypothèse vous semble réaliste pour l'échantillon considéré ? On détaillera à nouveau le raisonnement mathématique utilisé.

********************

**Exercice IV.** Soit $(X_1, ..., X_n)$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, dont la loi de probabilité commune admet la densité

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & si\ x \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$.

1) Dans la suite de l'exercice, on notera $\theta = E[X_i]$. Exprimer $\theta$ en fonction de $\alpha$. A quel sous ensemble de $\mathbb{R}$ appartient $\theta$ ?

2) Exprimer $f(x)$ en fonction de $\theta$ et donner la fonction de vraisemblance associée.

3) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $T_n$ de $\theta$.

4) Montrer que $E[ln(X_i)] = -\alpha$ et $E[(ln(X_i))^2] = 2\alpha^2$ puis calculer l'information de Fisher apportée par $(X_1, ..., X_n)$ sur $\theta$.

5) Etudier les propriétés asymptotiques de $T_n$.