Université de Rennes 1 — Année 2008–2009
Université de Bretagne Occidentale

Master 2 Recherche mention mathématiques
Formalisme thermodynamique, Analyse multifractale

24 mars 2009. Durée 2h

Les notes de cours sont autorisées.

Notations, rappels.

- $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, *muni de la métrique* $d(x,y) = e^{-n}$ *où* n *est le plus grand entier pour lequel* $x_k = y_k$ *pour tout* $k < n$.
- (X,d) *est un espace métrique compact.*
- *concaténation de* $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ *et* $x \in X$ *notée* $y = ax$: $y_k = a_k$ *si* $k < n$, $y_k = x_{k-n}$ *sinon.*
- *shift* $\sigma\colon X \to X$ *défini par* $\sigma((x_n)_{n\geq 0}) = (x_{n+1})_{n\geq 0}$
- $C_n(x) := \{y \in X \colon x_k = y_k\ \forall k < n\}$, *le* n*-cylindre contenant* $x \in X$
- $\mathcal{C}_n$ *désigne l'ensemble des* n*-cylindres*
- $S_n\varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ \sigma^k$, $S_0\varphi = 0$, *pour une fonction* $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$
- $M(X,\sigma)$ *désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur* X, *invariantes par* σ
- *un sous-ensemble* $Y \subset X$ *est appelé sous-shift si* Y *est compact et invariant, i.e.* $\sigma(Y) \subset Y$
- *support d'une mesure* μ : $\operatorname{supp}\mu := \{x \in X \colon \forall n > 0\ \mu(C_n(x)) > 0\}$
- *si* Y *est un sous-shift, on note* $M(Y,\sigma) \subset M(X,\sigma)$ *l'ensemble des mesures telles que* $\operatorname{supp}\mu \subset Y$
- $M(X,\sigma)$ *est muni de la distance* $\rho(\mu,\nu) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \sum_{C\in\mathcal{C}_n} |\mu(C) - \nu(C)|$
- $(M(X,\sigma),\rho)$ *est un espace métrique compact ; la topologie est identique à celle héritée de la convergence *-faible dans le dual de* $C^0(X)$: $\mu_k \xrightarrow{\rho} \mu$ *ssi* $\int \varphi d\mu_k \to \int \varphi d\mu$ *pour toute fonction continue* φ

Problème sur les mesures maximisantes. Soit $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitz. On note

$$A_\varphi = \sup_{\mu\in M(X,\sigma)} \int \varphi d\mu.$$

On appelle *mesure maximisante* toute mesure $m \in M(X,\sigma)$ qui réalise le supremum. Sans perte de généralités on suppose que $A_\varphi = 0$.

Question 1. *Support des mesures maximisantes.* On note $K_\varphi = \bigcup \operatorname{supp} m$ où l'union est prise sur toutes les mesures m maximisantes.

1.a) Pourquoi il existe toujours au moins une mesure maximisante ?

1.b) Vérifier que $\sigma(K_\varphi) \subset K_\varphi$ (on pourra utiliser que $C_{n+1}(x) \subset \sigma^{-1}C_n(\sigma x)$)

1.c) Montrer que K_φ est compact (on pourra remarquer que si (m_k) est une suite de mesures alors $m = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} m_k$ vérifie : $\forall k \geq 1, \operatorname{supp} m_k \subset \operatorname{supp} m$)

Question 2. *Sous-cohomologie.* On pose $v(x) := \sup\{S_n\varphi(ax) \colon n \geq 0, a \in \{0,1\}^n\}$.

2.a) Montrer que v est Lipschitz.

2.b) Montrer que pour tout $x \in X$ on a $v(\sigma x) \geq \varphi(x) + v(x)$. On en déduit donc l'inégalité de sous-cohomologie $\varphi \leq v \circ \sigma - v$.

Question 3. *Cohomologie sur le support.*

3.a) Montrer qu'une mesure m pour laquelle l'inégalité de sous-cohomologie est stricte sur un ensemble de mesure positive n'est pas maximisante. En déduire que sur K_φ on a la relation de cohomologie :

$$\forall x \in K_\varphi, \varphi(x) = v(\sigma x) - v(x).$$

3.b) Montrer qu'une mesure invariante m est maximisante ssi $m \in M(K_\varphi, \sigma)$.

Question 4. *Semi-continuité supérieure de l'entropie.* Le but de cette question est d'établir l'inégalité : si (μ_k) est une suite de $M(X,\sigma)$ qui converge vers μ alors $h_\mu(\sigma) \geq \limsup_{k\to\infty} h_{\mu_k}(\sigma)$.

4.a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|h_\mu(\sigma) - \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{C}_n)| < \varepsilon$
4.b) Montrer que l'application $\mu \mapsto H_\mu(\mathcal{C}_n)$ est continue.
4.c) En déduire la semi-continuité supérieure de l'entropie.

Question 5. *Existence de mesure maximisante d'entropie maximale.*

5.a) Pour tout réel $t \geq 0$ on note μ_t l'état d'équilibre du potentiel $t\varphi$. Etablir l'inégalité

$$h_{\mu_t}(\sigma) + t \int \varphi d\mu_t \geq 0.$$

5.b) Soit μ_∞ un point d'accumulation de (μ_t) lorsque $t \to \infty$. Montrer que μ_∞ est une mesure maximisante.

5.c) Montrer que μ_∞ est d'entropie maximale parmi les mesures maximisantes : si m est maximisante alors $h_{\mu_\infty}(\sigma) \geq h_m(\sigma)$.

5.d) Prouver l'existence d'au moins une mesure maximisante d'entropie égale à l'entropie topologique $h_{\text{top}}(\sigma|_{K_\varphi})$, où $\sigma|_{K_\varphi}$ désigne la restriction de σ au sous-shift K_φ.