Analyse approfondie - Plan du cours 2009

10 semaines, 2x1h30 heures par semaine

Table des matières

1 Les suites

Définition. Une suite est une application $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note en général $u_n = u(n)$. La suite u se note aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (u_n) ou $(u_n)_{n\geq 0}$.
Il y a plusieurs façons de définir une suite :
(1) explicitement en fonction de n : $u_n = \sin(n\sqrt{2})$; $u_n = n!$
(2) en fonction de n mais non explicite a priori : u_n= nombre d'entiers pairs entre 1 et n

(3) comme somme des termes d'une autre suite : $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$; $u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$
(4) par une intégrale : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$
(5) par récurrence : on donne une relation entre u_{n+1} et u_n et aussi u_0 : $u_0 = 0,7$ et $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

1.1 Convergence, divergence

Notion de voisinage : $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$
Définition*. La suite (u_n) converge si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout voisinage de ℓ, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans ce voisinage : $\exists \ell, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon$.
Proposition. Unicité de ℓ. On l'appelle la limite de (u_n) noté $\ell = \lim u_n$.
Exemples. (1) $u_n = \frac{1}{n}$. (u_n) converge vers 0.
(2) $u_n = 2^{-n}$. Par récurrence, $2^n \geq n + 1$.
Définition. On dit que $\lim u_n = +\infty$ si $\forall A > 0, \exists n_A, \forall n > n_A, u_n > A$.
On dit que $\lim u_n = -\infty$ si $\forall A > 0, \exists n_A, \forall n > n_A, u_n < -A$.
Exemple. $u_n = n^2$. $\lim u_n = +\infty$.
Remarque. Pour calculer des limites on utilise très rarement ces définitions. Pour démontrer des théorèmes, c'est souvent indispensable.
Opérations sur les limites
Les mêmes que sur les limites de fonctions.
Définition. On dit que (u_n) est bornée si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. majorée, minorée.
Proposition. Une suite convergente est bornée.
Théorème. Si $u_n \to \ell$, $w_n \to \ell$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$ $(\forall n)$ alors $v_n \to \ell$.
Proposition. Si $u_n \to 0$ et (v_n) bornée alors $u_n v_n \to 0$.
Exemple. $\frac{1}{n}\sin(n)$.
Proposition. Supposons $v_n \to +\infty$.
(i) $\frac{1}{v_n} \to 0$
(ii) si (u_n) minorée alors $u_n + v_n \to +\infty$
(iii) si u_n minorée par $m > 0$ alors $u_n v_n \to +\infty$
(iv) si $u_n \to 0$ et $u_n > 0 (\forall n)$ alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.
Proposition. Si $\lim u_n$ et $\lim v_n$ existent et $u_n \leq v_n (\forall n)$ alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.
!!! pas de passage à la limite dans les inégalités strictes.
Rappel limite d'une fonction. évoquer voisinage pointé.

Théorème. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $\lim u_n = x_0$, $u_n \neq x_0 (\forall n)$ et $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe alors $\lim f(u_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.
Rappel continuité d'une fonction.
Corollaire. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en x_0 et $\lim u_n = x_0$ alors $\lim f(u_n) = f(x_0)$.
Exemples. (i) $v_n = \cos(\frac{1}{n})$ (ii) Soit $a \in \mathbb{R}$. $\lim(1 + \frac{a}{n})^n = e^a$.
Exemples importants* (à connaître par coeur :( )
a) Suite géométrique $(a^n), a \in \mathbb{R}$
(i) $a > 1$: $\lim a^n = +\infty$
(ii) $|a| < 1$: $\lim a^n = 0$
(iii) $|a| = 1$: $\lim(-1)^n$ n'existe pas ; $\lim 1^n = 1$
(iv) $a \leq -1$: $\lim a^n$ n'existe pas
(v) Série géométrique $\lim 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1}{1-a}$ pour tout $|a| < 1$.
b) Suite $(\frac{a^n}{n^p})$, $p > 0$.
(i) $|a| \leq 1$: $\lim \frac{a^n}{n^p} = 0$
(ii) $a > 1$: $\lim \frac{a^n}{n^p} = +\infty$ (*prendre le log*)
(iii) $a < -1$: pas de limite.
c) Suites telles que $\exists L < 1, n_0, \forall n > n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} < L$: $\lim u_n = 0$
$|\frac{u_n}{u_{n_0}}| = |\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}}| \leq L^{n-n_0}$
Conséquence $\forall a \in \mathbb{R}, \lim \frac{a^n}{n!} = 0$.
d) Suite $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$; $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.
e) Approximation décimale : $a \in \mathbb{R}$, $u_n = \frac{E(10^n a)}{10^n} \to a$.
Définition.* On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si la suite $\frac{u_n}{v_n} \to 1$. On note $u_n \sim v_n$.
Exemple. $n^2 \sim n^2 + n$.
Propriétés. (i) Deux suites équivalentes ont même limite. (ii) Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$ et $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
! ! Equivalent à zéro n'a pas de sens. On ne peut pas additionner les équivalents.

1.2 Construction des nombres réels

Nombres rigoureusement construits : entiers, entiers relatifs, rationnels. plusieurs méthodes rigoureuses pour construire les réels : développement décimal, coupure de Dedekind, suites de Cauchy de rationnels. C'est cette dernière que l'on présente ici.

Rappel. Convergence d'une suite. On constate qu'à partir d'un rang n_ε deux termes de la suite sont à une distance $< 2\varepsilon$.
Représentation de la suite sur une accumulation de droites : on imagine les réels comme limites de rationnels.
! ! Maintenant on ne parle plus que de nombres rationnels (les réels n'existent pas encore...)
Définition*. Soit (x_n) une suite de nombres. On dit que (x_n) est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n, p > n_\varepsilon, |u_n - u_p| < \varepsilon$.
Proposition. Toute suite convergente est de Cauchy.
Lemme. Toute suite de Cauchy est bornée.
Proposition. Si (x_n) et (y_n) sont de Cauchy alors $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont de Cauchy.
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels. $\mathcal{C} \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Muni des opérations $x + y = (x_n + y_n)$ et $xy = (x_n y_n)$ c'est un anneau. Le zéro est la suite constante de terme $z_n = 0$, l'unité est la suite constante de terme $u_n = 1$.
Soit $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des suites de Cauchy convergeant vers 0. On voudrait identifier deux suite $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ de $\mathcal{C}$ si $x - y \in \mathcal{C}_0$. C'est-à-dire, prendre l'espace quotient $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$. C'est encore un anneau (il hérite des opérations). On l'appelle l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.
Injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: A chaque rationnel $q \in \mathbb{Q}$, on peut associer la classe d'équivalence $\mathcal{C}(q)$ de l'ensemble des suites de rationnels convergeant vers q. On identifiera chaque élément $q \in \mathbb{Q}$ avec le nombre réel $\mathcal{C}(q)$ correspondant (dont un représentant est par exemple la suite constante de terme $u_n = q$).
Soit $\mathcal{C}^+ \subset \mathcal{C}$ le sous-ensemble des suites $x = (x_n)$ telles que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon, x_n > -\varepsilon$. On note aussi $\mathcal{C}^- = -\mathcal{C}^+$. Bien sûr $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \mathcal{C}^0$.
Proposition. Soit $x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$. Alors $x \in \mathcal{C}^+$ ou $x \in C^-$.
PR. Soit $x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$. Soit ε_0 de la non convergence vers 0, $|x_n| \geq \varepsilon_0$ i.s. Le critère de Cauchy avec $\varepsilon_0/2$ montre qu'alors $x_n > \varepsilon_0/2$ apdcr, ou $x_n < -\varepsilon_0/2$ apdcr.
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$: $x \leq y$ si $y - x$ est représenté par un élément de $\mathcal{C}^+$. $x < y$ si $y - x$ est représenté par un élément de $\mathcal{C}^+ \setminus \mathcal{C}_0$.
Rem. Mêmes propriétés que sur $\mathbb{Q}$ relativement aux opérations $+, \times$.
Définition. Valeur absolue $|x| = \max(x, -x)$.
Intervalles $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b[\}$, etc.
Proposition. Entre deux réels différents il existe toujours au moins un rationnel.

PR. Supposons $x' - x > 0$. La preuve de la proposition précédente montre qu'il existe un rationnel $q = \varepsilon_0$ tel que $0 < q \leq x' - x$. Alors au moins un des kq,$k \in \mathbb{Z}$ doit être dans $[x, x']$. En effet, x représentée par une suite de Cauchy, donc bornée par un M rationnel. Donc $\{k \in \mathbb{Z} \colon qk \geq x\}$ est non vide, minoré par $-M/q$. Il possède donc un plus petit élément k_0. $\square$

Proposition. Il existe au moins un nombre irrationnel (réel non rationnel).

PR. $x_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n!}$. Pour $m > n$ on a $x_m - x_n \leq \frac{1}{nn!}$ donc Cauchy. Ne peut pas converger vers un rationnel. Soit e. $\square$

Proposition. Entre deux rationnels différents il existe toujours un réel.

PR. Il existe un irrationnel x dans $]0, 1[$. Soient $q < q'$ deux rationnels. L'irrationnel $q + (q' - q)x \in]q, q'[$. $\square$

1.3 Suite de Cauchy de nombres réels

Définition. Soit (u_n) une suite de nombres réels.

(i) (u_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n, p > n_\varepsilon, |u_n - u_p| < \varepsilon$.

(ii) (u_n) converge si $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall \varepsilon > n_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Rem. $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ou $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ne change rien. On peut même prendre $\varepsilon = \frac{1}{k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Proposition. Toute suite de Cauchy de rationnels converge vers le réel qu'elle représente.

PR. (cf. dessin) Soit x un nombre réel et (x_n) une suite de rationnels représentant x. Soit $\varepsilon > 0$ et n_ε du critère de Cauchy. $\forall n, p > n_\varepsilon$, $x_p - \varepsilon < x < x_p + \varepsilon$. Fixe p. Par identification des suites constantes $x_p \pm \varepsilon$ on a $x_p - \varepsilon = \mathcal{C}(x_p - \varepsilon) \leq x \leq \mathcal{C}(x_p + \varepsilon) = x_p + \varepsilon$. $\square$

Théorème*. Une suite de nombres réels est convergente ssi elle est de Cauchy.

PR. $\Rightarrow$: ok.

$\leftarrow$: Soit (u_n) de Cauchy de réels. On fabrique une suite de rationnels (v_n) proche de (u_n), de Cauchy. On prends v_n entre $u_n - \frac{1}{n}$ et $u_n + \frac{1}{n}$. Alors $v_n = u_n + (v_n - u_n)$ est la somme de deux suites de Cauchy (la seconde converge vers 0 donc Cauchy). Elle représente un réel x. Donc $v_n \to x$. Donc $u_n \to x$ aussi car même classe. $\square$

Rem. On dit que $\mathbb{R}$ est complet.

Théorème des suites adjacentes. Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes de nombres réels : (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n \to 0$. Alors elles convergent, vers la même limite.

PR. Soit $\varepsilon > 0$. Soit p tel que $|u_p - v_p| < \varepsilon$. Alors pour tout $m, n > p$ on a $u_p \leq u_m, u_n \leq v_p$. Donc $|u_n - u_m| < \varepsilon$. Donc (u_n) de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est complet, elle converge. Comme $v_n - u_n \to 0$, (v_n) converge aussi et vers la même limite. □

Exemple. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Théorème des segments emboités*. Soit I_n une suite décroissante de segments non vides de $\mathbb{R}$ de longueur qui tend vers zéro. Alors $\cap I_n$ est un singleton.

PR. $I_n = [u_n, v_n]$ définit deux suites adjacentes.

1.4 Borne supérieure

Définition. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que m est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq m$.

Exemples. 1 est un majorant de $[0, 1; 2/3]$, 2 un majorant de $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 3\}$. Peut on trouver le meilleur majorant ? dans le premier exemple, c'est $2/3$.

Définition. Soit A un ensemble non vide. Un majorant de A appartenant à A est appelé un maximum. Noté $\max A$.

Dans les deux exemples, le maximum existe et vaut $2/3$ et $\sqrt{3}$. Mais le maximum n'existe pas toujours. Exemple $[0, 1[$ n'a pas de maximum, $\{\frac{-1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ non plus.

Définition*. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On dit qu'un nombre s est la borne supérieure de A si c'est le plus petit des majorants. C'est-à-dire

(i) s est un majorant de A ; (ii) $\forall m$ majorant de A, $m \geq s$.

On le note $s = \sup A$.

Exemple. Dans les deux premiers exemples, on a $\sup A = \max A$. Les deux suivants 1, et 0.

Théorème*. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

PR. Construire deux suites adjacentes, $x_n \in A$ et y_n majorant A, par dichotomie. □

Exercice. 1) Calculer $\sup\{\frac{3n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$; 2) $\sup\{\frac{3n+1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$; 3) Montrer l'encadrement $\pi \leq \sup\{2\sin(x) + x : x \in [0, 5]\} \leq 7$.

Proposition. Soit A un ensemble non vide et majoré. Alors il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers $\sup A$.

PR. Dans la preuve du théorème précédent on prend la suite (x_n). □

Proposition*. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Pour que M soit la borne supérieure de A il faut et il suffit que
(i) M majore A ; (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > M - \varepsilon$.
Définition. Si A est une partie non vide mais non majorée, on pose $\sup A = +\infty$.
Exemple. $\sup\{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$.
Exercice. Montrer l'existence d'une suite d'éléments de A qui converge vers $\sup A$.
Exercice. 1) Soit (u_n) une suite de nombres réels. Montrer l'équivalence : (u_n) majorée ssi $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$; 2) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$, $\sup A + B = \sup A + \sup B$.
De même on définit l'infimum d'un ensemble A non vide et minoré comme le plus grand des minorants. Noté $\inf A$. C'est aussi $-\sup(-A)$. Il existe une suite (x_n) de A qui converge vers $\inf A$. Pour que m soit la borne inférieure il faut et il suffit que
(i) m minore A ; (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < M + \varepsilon$.
Notation usuelle : Lorsque $f : X \to \mathbb{R}$ est une application et $E \subset X$, on note $\sup_{x\in E} f(x) := \sup\{f(x) : x \in E\}$. Aussi $\sup_E f$.
Exemple. Pour une suite (u_n) de nombre réels, $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$; pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $E \subset D_f$, $\sup_{x\in E} f(x)$.
<u>Application de la borne supérieure aux suites monotones.</u>
Définition. On dit que (u_n) est croissante si $\forall n, u_{n+1} \geq u_n$; décroissante si $\forall n, u_{n+1} \leq u_n$. Une suite monotone est une suite croissante ou décroissante.
Théorème*. La limite d'une suite monotone existe toujours. En particulier
(i) Soit (u_n) une suite croissante. Alors $\lim u_n = \sup u_n$. Si elle est majorée elle converge, sinon sa limite est $+\infty$.
(ii) Soit (u_n) une suite décroissante. Alors $\lim u_n = \inf u_n$. Si elle est minorée elle converge, sinon sa limite est $-\infty$.
PR. Soit (u_n) croissante majorée. Posons $\ell = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Alors $\lim u_n = \ell$. $\square$
Exemples. 1) $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Pour $n \geq 4$, $2^n \leq n!$, d'où (u_n) majorée.
2) $u_n = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}$. $u_{2^{n+1}} - u_{2^n} \geq \frac{1}{2}$, d'où $u_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1$.
<u>Application à certaines suites récurrentes</u>
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère une suite (u_n) ayant la propriété suivante : $u_{n+1} = f(u_n)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1) = f(f(u_0))$, etc. donc tous les termes de la suite sont déterminés par f et la donnée de u_0. On dit que (u_n) est une suite récurrente.
Représentation graphique des itérations.

Proposition. Supposons f continue. Si la suite (u_n) est convergente alors sa limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.
Si l'on sait que la suite converge, alors sa limite est facile à calculer. Il suffira par exemple de vérifier qu'elle est monotone.
Exemple. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = \frac{1}{2}$. (u_n) croissante, majorée par 1. $\sqrt{\ell} = \ell$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.
Il ne faut pas croire que la limite des suites récurrentes existe toujours, même lorsque f est une fonction simple. Prendre $f(x) = ax(1-x)$, avec $a = 4$ et $u_0 \in [0,1]$. Le comportement est chaotique.

1.5 Suites extraites

Définition*. Soit (u_n) une suite et $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On dit que la suite $(u_{\sigma(n)})$ est une suite extraite de (u_n).
Exemples. (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ; $\frac{1}{4^n}$ est une suite extraite de $\frac{1}{n^2}$.
Rem. $\sigma(n) \geq n$ pour tout n ; si σ et τ strictement croissantes alors $\sigma \circ \tau$ l'est aussi. $(u_{\sigma(\tau(n))})$ est une suite extraite de $(u_{\sigma(n)})$ et de (u_n). On désigne souvent la suite extraite par $(u_{n_k})_k$ (prendre $n_k = \sigma(k)$)
Proposition. Si (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.
Exemple. $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ diverge. On voit apparaître 'deux limites'...
Définition*. Soit (u_n) une suite de nombre réels. On définit la limite supérieure (u_n) par $\limsup u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k$. De même la limite inférieure par $\liminf u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k$.
Rem. Ces limites existent...
Proposition. Les limites inférieures et supérieures vérifient
(i) $\liminf u_n \leq \limsup u_n$;
(ii) si $\liminf u_n = \limsup u_n$ alors $\lim u_n$ existe et est la valeur commune ;
(iii) si (u_{n_k}) extraite de (u_n), alors $\liminf u_n \leq \liminf u_{n_k}$ et $\limsup u_{n_k} \leq \limsup u_n$;
(iv) il existe une suite extraite (u_{n_k}) telle que $\lim u_{n_k} = \limsup u_n$; de même pour la $\liminf$.
Proposition. Soit (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. $\ell = \limsup u_n$ ssi (i) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon, u_n < \ell + \varepsilon$ et (ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N, u_n > \ell - \varepsilon$.
Soit (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. $\ell = \liminf u_n$ ssi (i) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon, u_n > \ell - \varepsilon$ et (ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N, u_n < \ell + \varepsilon$.
Exercice. Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\limsup \frac{1}{n} \log u_n < 0$. Montrer que $\lim u_n = 0$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass*. Toute suite bornée de nombres réels admet au moins une suite extraite convergente.
PR. (iv) de la proposition. $\square$
Exercice. Soit (u_n) une suite réelle positive qui tend vers 0. (a) Est il vrai que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang ? (b) Montrer que (u_n) possède une suite extraite décroissante.

2 Topologie de $\mathbb{R}^d$

Les éléments de $\mathbb{R}^d$ (appelés points ou vecteurs) sont notés $x = (x_1, \ldots, x_d)$ où chaque $x_i \in \mathbb{R}$. Espace vectoriel : $x + y$, λx $(\lambda \in \mathbb{R})$.

2.1 Normes

Norme généralise la distance euclidienne (dans l'espace, le plan) : distance entre A et B = norme du vecteur AB. voir.
Définition* Une norme sur $\mathbb{R}^d$ est une application $N\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les axiomes :
(i) $N(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$; (ii) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$; (iii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
Remarque : On note souvent $\|x\| = N(x)$. On déduit du (iii) que $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.
Les trois normes les plus communément utilisées sur $\mathbb{R}^d$:
(i) $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$; (ii) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$; (iii) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.
Elles vérifient les inégalités

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{d}\|x\|_2 \leq d\|x\|_\infty.$$

On peut munir $\mathbb{R}^d$ d'un produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle x, y\rangle \leq \|x\|_2 \|y\|_2$.
Preuve que ce sont bien des normes (convexité de $t \mapsto t^2$). Relations.
A partir d'une norme, on définit les boules ouvertes et fermées de centre $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r > 0$:
$B_o(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d \colon \|y - x\| < r\}$ et $B_f(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d \colon \|y - x\| \leq r\}$.
Représentation graphique dans le cas de $\mathbb{R}^2$.
Sur $\mathbb{R}$ les boules sont les intervalles bornés : centre, rayon.
On munit dorénavant $\mathbb{R}^d$ d'une des 3 normes définies ci-dessus, que l'on notera $\|\cdot\|$.

Définition*. Soit (u_n) une suite à valeur dans $\mathbb{R}^d$. Alors on dit que (u_n) converge dans $\mathbb{R}^d$ si il existe $L \in \mathbb{R}^d$ tel que la suite numérique $\|u_n - L\| \to 0$. En d'autres termes, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon, \|u_n - L\| < \varepsilon$. On appelle L la limite, elle est unique d'après l'axiome (i) des normes.
Exemple. $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n})$. Tracer u_1, u_2, u_3. $L = (0, 1)$.
PR. unicité.
Proposition. Soit (u_n) une suite à valeur dans $\mathbb{R}^d$. Alors (u_n) converge dans $\mathbb{R}^d$ ssi chaque coordonnées $(u_{n,i}), i = 1, \ldots, d$ converge dans $\mathbb{R}$.
Définition. Une partie non vide de $\mathbb{R}^d$ est dite bornée si elle est contenue dans une boule. De manière équivalente, A borné ssi $\exists M$ tq $\forall x \in A$, $\|x\| \leq M$.
PR. de l'équivalence
Exemples. 1) Sur $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 - x_2^2 = 1\}$ n'est pas borné.
2) Sur $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ est borné. (*prendre* $\| \cdot \|_1$).

2.2 Ouverts, fermés

Définition*. Une partie V de $\mathbb{R}^d$ est dite ouverte si $\forall x \in V, \exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$. Remarquons que $\emptyset$ est un ensemble ouvert.
Exemples. Prouver qu'une boule ouverte est ouverte. $\mathbb{R}^d$ est ouvert. Un intervalle ouvert est ouvert dans $\mathbb{R}$. Un segment n'est pas ouvert. Le produit cartésien de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est ouverts dans $\mathbb{R}^2$. Plus généralement le produit de deux ouverts est ouvert.
Proposition. 1) Si $V_1, \ldots, V_p$ sont des ouverts alors $\cap_{i=1}^p V_i$ est ouvert ;
2) Si $(V_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'ouverts alors $\cup_i V_i$ est ouvert.
Définition*. une partie de $F \subset \mathbb{R}^d$ est dite fermée si $F^c = \mathbb{R}^d \setminus F$ est un ouvert.
Exemples. Prouver que toute boule fermée est fermée. $\mathbb{R}^d$ est fermé. Tout intervalle fermé est fermé. Le produit cartésien de deux intervalles fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, le produit de deux fermés est fermé.
Proposition. 1) Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des fermés alors $\cup_{i=1}^p F_i$ est fermé ;
2) Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de fermés alors $\cap_i F_i$ est fermé.
Exercices. Déterminer si les ensembles $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0 \text{ et } x^2 + y < 1\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0 \text{ ou } x^2 + y \geq 1\}$ sont ouverts ou fermés.

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. On appelle intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ pour lesquels il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
Proposition. $\overset{\circ}{A}$ est, au sens de l'inclusion, le plus grand ouvert contenu dans A. A ouvert ssi $A = \overset{\circ}{A}$.
Exemples. Dans $\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\overset{\circ}{[a, b]} =]a, b[$. Dans $\mathbb{R}^d$, $\overset{\circ}{B_f(x, r)} = B_o(x, r)$. Soit $H \subset \mathbb{R}^2$ l'union des boules ouvertes de rayon 1 et de centre $(\pm 2, 0)$ et du segment $[0, 1] \times \{0\}$. Calculer $\bar{H}$, puis son intérieur.
Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. On appelle adhérence ou fermeture de A, noté $\bar{A}$, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
Proposition. $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A. A fermé ssi $A = \bar{A}$.
Exemples. Dans $\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overline{]a, b[} = [a, b]$.
Rem. $(\bar{A})^c = (\overset{\circ}{A^c})$, $(\overset{\circ}{A})^c = (\bar{A^c})$.
Proposition. Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. Alors A est fermé ssi toute suite de A convergente a sa limite dans A.
Théorème*. Les seules parties de $\mathbb{R}^d$ ouvertes et fermées à la fois sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^d$.
PR. Soit A ouvert et fermé, non vide et non plein. Posons $B = A^c$. On a $\mathbb{R}^d = A \cup B$ avec A et B ouverts disjoints. Où se trouve la frontière ? $a \in A$, $b \in B$: $a + t(b - a) \in A$?
Rem. on a la corollaire $\mathbb{R}^d = A \cup B$ avec A et B ouverts disjoints implique A ou B vide. On dit que $\mathbb{R}^d$ est connexe.
Définition*. On dira que $A \subset \mathbb{R}^d$ est un compact de $\mathbb{R}^d$ si toute suite d'éléments de A possède une suite extraite convergente dans A.
Exemple. Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact (conséquence de Bolzanno-Weierstrass)
Théorème*. Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. Alors A est compact ssi A est fermé et borné.
PR. Implication ok. Réciproque : extraction successive pour chaque coordonnées.

3 Continuité

3.1 Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

On considère des fonctions de plusieurs variables $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.
Définition*. Soit $V \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert et f une fonction définie sur V. On dit que f est continue en $x_0 \in V$ si la limite de f en x_0 est égale à $f(x_0)$,

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur un ensemble A si elle est continue en tout point de A.
Proposition. Si f et g sont continues en x_0 alors $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), et fg sont continues en x_0. De même f/g si $g(x_0) \neq 0$.
Lemme. Si f est continue en x_0 alors f est bornée sur un voisinage de x_0 : $\exists \delta > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in B(x_0, \delta)$, $|f(x)| \leq M$.
Continuité des fonctions de base : a) les fonctions coordonnées b) les polynômes c) les fractions rationnelles
Exemples. 1) la fonction $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ privé des droites d'équation $y = \pm x$.
Proposition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Si $f\colon \mathbb{R}^p \to I$ est continue en x_0 et $g\colon I \to \mathbb{R}$ est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.
Exemple. 2) la fonction $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ est définie et continue sur la boule unitée fermée ; 3) la fonction $f(x,y) = \sin(x/y)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de la droite $y = 0$.
Proposition*. Soit $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est continue en x_0 ssi pour toute suite (u_n) de $\mathbb{R}^p$ telle que $\lim u_n = x_0$ on $\lim f(u_n) = f(x_0)$.
Théorème* [Weierstrass]. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^p$ et $f\colon K \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur K. Si f est continue sur K alors elle y atteint ses bornes, i.e. il existe $a, b \in K$ tels que $\forall x \in K, f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
preuve. $L = f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$.
Rappel : Soit $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction et A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle image réciproque de A par f le sous ensemble de $\mathbb{R}^p$ défini par

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^p\colon f(x) \in A\}.$$

Représentation graphique. Image réciproque et union, intersection, complémentaire.
Proposition*. Soit $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction.
i) f est continue sur $\mathbb{R}^p$ ssi l'image réciproque de tout ouvert est ouverte.
ii) f est continue sur $\mathbb{R}^p$ ssi l'image réciproque de tout fermé est fermée.
Méthode pour définir des parties ouvertes, fermées :
L'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y > x^2 \text{ et } x^4 + y^4 < 1\}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$; l'ensemble $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x + y + z = 1\}$ fermé de $\mathbb{R}^3$; l'ensemble $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon xy = 1 \text{ et } x \geq 0\}$ est fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. Retrouver le fait que les boules ouvertes resp. fermées sont... ouvertes resp. fermées.
!!! La continuité par rapport à chaque variable ne suffit pas à avoir la continuité* : Considérer $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq 0$, $f(0) = 0$.

3.2 Fonctions vectorielles

On considère des fonctions $f \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ avec $p, q \geq 1$ deux entiers. Pour $x \in \mathbb{R}^p$ on note les coordonnées de $f(x)$ par $(f_1(x), \ldots, f_q(x))$. On note naturellement $f = (f_1, \ldots, f_q)$. Les fonctions $f_1, \ldots, f_q$ sont les fonctions coordonnées.
Définition*. Soit $V \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert et f une fonction définie sur V à valeur dans $\mathbb{R}^q$. On dit que f est continue en $x_0 \in A$ si la limite de f en x_0 est égale à $f(x_0)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V, \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Exemple. Toute application $\varphi \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ linéaire est continue.
La continuité d'une fonction vectorielle est équivalente à la continuité de ses applications coordonnées. La composée de deux fonctions vectorielles continues est continue.
Proposition. Une application f est continue en x_0 ssi pour toute suite (u_n) de limite x_0 on a $\lim f(u_n) = f(x_0)$.

4 Différentiabilité

4.1 Rappel sur la dérivabilité des fonctions réelles

Dérivée d'une fonction réelle en x : Définition $f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y)f - f(x)}{y - x}$.
Autres écritures : $f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h)/h \to 0$ quand $h \to 0$.
Théorèmes*. Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
(i) Théorème de Rolle : si $f(a) = f(b)$ il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
(ii) Théorème des accroissements finis : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
(iii) Inégalité des accroissements finis : $|f(b) - f(a)| \leq \sup_{[a,b]} |f'||b - a|$.
Preuve. (i) f possède un extremum dans $]a, b[$, où la dérivée s'annule. (ii) Rolle appliqué à la fonction $f(t) - t\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ sur $[a, b]$. (iii) $|f'(c)| \leq \sup |f'|$.

On dit que f est de classe C^n sur $[a,b]$ si elle est n fois continuement dérivable.
Théorème. [Formule de Taylor-Lagrange] Soit f de classe C^n sur $[a,b]$, $n+1$-fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Preuve. Choisir A pour pouvoir appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g(t) = f(a) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - A\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$.
Théorème. [Formule de Taylor-Young] Soit f une fonction définie sur un voisinage de a et $n+1$-fois dérivable en a. Alors il existe une fonction $\varepsilon_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de 0 telle que

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \varepsilon_n(h)$$

avec $\varepsilon_n(h)/h^n \to 0$ quand $h \to 0$.

4.2 Développements limités

Notation de Landau*. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies au voisinage d'un point a. On note $f =_a o(g)$ si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$; $f =_a O(g)$ si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On écrit alors $f_1 = f_2 + o(g)$ pour signifier $f_1 - f_2 = o(g)$, ou O.
Exemples. $t\sin(1/t) =_0 O(t)$; $\exp t =_0 1 + o(1)$; $x^{2008} =_1 1 + 2008(x-1) + o(x-1)$.
Définition*. On appelle développement limité à l'ordre n au voisinage de a d'une fonction f, définie sur un voisinage d'un point a, un polynôme P de degré au plus n tel que $f(x) = P(x) + o((x-a)^n)$. Le DL est unique.
Exemples. x est le DL à l'ordre 1 et 2 de la fonction sin en 0 : $\sin x = x + o(x)$ et $\sin x = x + o(x^2)$. On a même $\sin x = x + O(x^3)$. La formule de Taylor-Young donne des développements limités classiques :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

4.3 Applications différentiables, dérivées partielles

La dérivée ne se généralise pas aux fonctions de plusieurs variables. La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 oui.

Définition*. Soit V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f\colon V \to \mathbb{R}^q$. On dit que f est différentiable en $x \in V$ s'il existe une application linéaire $L\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et une application $\varepsilon\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ telles que

$$\forall h \in \mathbb{R}^p t.q.\ x + h \in V, f(x+h) = f(x) + L(h) + \varepsilon(h)$$

avec $\|\varepsilon(h)\|/\|h\| \to 0$ quand $h \to 0$. L'application L est appelée différentielle de f en x. On la note $d_x f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

Rem. Unicité de la différentielle en un point.

Exemples. 1) f constante, $d_x f = 0$ 2) f linéaire, $d_x f = f$ 3) $f(x,y) = (3xy, x^2)$.

Rem. Lorsque $p = q = 1$, f différentiable ssi f dérivable, et $d_x f(h) = f'(x)h$.

Proposition. (i) Une application différentiable en un point est continue en ce point.

(ii) somme, multiplication par un scalaire, multiplication par une fonction numérique conserve la différentiabilité : $d_x(f+g) = d_x f + d_x g$, $d_x(\lambda f) = \lambda d_x f$, $d_x(af) = f(x) d_x a + a(x) d_x f$.

Rem. Soit $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. La différentielle s'écrit $d_x f(h) = \sum_{j=1}^p d_x f(e_j) h_j$.

Définition*. Soit $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. On appelle dérivée partielle de f en $x \in \mathbb{R}^p$ par rapport à la $j$ème variable la dérivée en x_j de l'application définie par

$$t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_p).$$

On la note $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$.

Proposition*. [Ecriture sur la base canonique I] Soit $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en x alors $d_x f(h) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j$.

Rem. Si une fonction est différentiable en x alors toutes ses dérivées partielles existent.

La réciproque est fausse : $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$, $f(0) = 0$, f n'est même pas continue.

Théorème*. Soit $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Si toutes les dérivées partielles existent et sont continues en x alors f est différentiable en x.

Définition. Lorsque toutes les dérivées partielles de $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ sont continues sur V, on dit que f est continuement différentiable sur V ou encore que f est de classe C^1 sur V, que l'on note $f \in C^1(V)$.

Exemples. 1) les fonctions polynomiales en les p variables $x_1, \ldots, x_p$; 2) les foncitions rationnelles $f = P/Q$ avec P et Q polynomiales sur $V = \mathbb{R}^p \setminus Q^{-1}(\{0\})$.

Exercices. 1) montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt[3]{(xy)^4}$ appartient à $C^1(\mathbb{R}^2)$; 2) montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0) = 0$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'appartient pas à $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Proposition*. [Ecriture sur la base canonique II] Soit $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. L'application f est différentiable en x ssi ses applications coordonnées $f_1, \dots, f_q$ le sont. Dans ce cas $d_xf = (d_xf_1, \dots, d_xf_q)$. La différentielle s'écrit

$$d_xf(h) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} d_xf_i(e_j)h_je_i = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}h_je_i, \quad h \in \mathbb{R}^p.$$

Définition. Soit $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ différentiable en x. On appelle matrice jacobienne de f la matrice

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_q(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_q(x)}{\partial x_p} \end{bmatrix}$$

C'est la matrice de d_xf dans la base canonique : si $h = (h_j)_{1\le j\le p}$ alors $d_xf(h) = J_f(x)h$.

Exemple. La jacobienne du changement de variable en coordonnées polaires $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$.

La notion de fonction de classe C^1 s'étend verbatim aux fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.

Théorème*. Si f est différentiable en $x \in V$ et g est différentiable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est différentiable en x. De plus, la différentielle en x est donnée par $d_x(g\circ f) = (d_{f(x)}g) \circ d_xf$.

Corollaire. La jacobienne d'une composition est le produit des jacobiennes : $J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x)$.

Exemples. 1) $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $g\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, $g\circ f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$:

$$(\frac{\partial g\circ f}{\partial x_1}, \frac{\partial g\circ f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g\circ f}{\partial x_p}) = (\frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_q}) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

Gradient d'une fonction scalaire : $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_p})$. La formule de différentiabilité s'écrit

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \varepsilon(h).$$

On a alors

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g,\ \nabla \lambda f = \lambda \nabla f,\ \nabla fg = f\nabla g + g\nabla f,\ \nabla \frac{f}{g} = \frac{1}{g^2}(g\nabla - f\nabla g).$$

Définition. Soit $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une dérivée directionnelle selon le vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^p$ non nul en $x \in V$ si la fonction $t \mapsto f(x+t\vec{v})$ est dérivable en $t = 0$. Cette dérivée est notée $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x)$.
Rem. Les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_j}$ sont les dérivées directionnelles selon les directions e_j.
Proposition. Si f est différentiable en x alors $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x) = \langle \nabla f(x), \vec{v}\rangle$.

4.4 Dérivées partielles secondes, formule de Taylor

Définition*. Soit $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $x \in V$. Supposons qu'en tout point y d'une boule ouverte $B \subset V$, f admette des dérivées partielles. Elles définissent p fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon x \in B \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$.
i) On dit que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 si chacune des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet des dérivées partielles (premières) que l'on note

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x).$$

ii) On dit que f est de classe C^2 sur V si elle admet en tout point de V des dérivées partielles premières et secondes continues sur V.
Théorème* [Schwarz]. Si f est de classe C^2 sur l'ouvert V alors pour tout i, j et tout $x \in V$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x).$$

Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Soit $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur V. Soient $x \in V$ et $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $[x, x+h] := \{x + th, t \in [0,1]\} \in V$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x+\theta h).$$

preuve. Formule de Taylor à l'ordre 2 pour $F(t) = f(x+th)$ sur $[0,1]$.
Définition. On appelle matrice hessienne de f en x la matrice, notée $\nabla^2 f(x)$, définie par $\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x)\right)_{i,j}$. Cette matrice est symétrique (Schwarz) et c'est la jacobienne en x de la fonction ∇f. On peut alors écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x+\theta h)h, h\rangle, \theta \in]0,1[.$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Sous les mêmes hypothèses,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x) + \varepsilon(h) \\ &= f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x)h, h\rangle + \varepsilon(h), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(h)/\|h\|^2 \to 0$ quand $h \to 0$.

4.5 Extremums des fonctions

Fonctions $f\colon V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, V ouvert. Extremum : minimum ou maximum.
Définition. i) On dit que f admet un maximum local en x si il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in B \cap V$, $f(y) \leq f(x)$.
ii) On dit que f admet un minimum local en x si il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in B \cap V$, $f(y) \geq f(x)$.
iii) minimum ou maximum strict si inégalité stricte pour $y \neq x$
Théorème*. Soit f différentiable en x. Pour que f admette un extremum local en x il est nécessaire que $d_x f = 0$.
Rem. Cette condition n'est pas suffisante. $f(x,y) = x^2 - y^2$. $(0,0)$ est un point selle.
Définition. Un point $x \in v$ tel que $d_x f = 0$ est appelé point critique de f.
Extremum des fonctions de 2 variables : la hessienne $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$.
Théorème*. Si x est un point critique de f et si $rt - s^2 > 0$ avec $r > 0$ (resp. $r < 0$) alors f admet un minimum (resp. maximum) local strict en x.
Preuve. Taylor-Young à l'ordre 2.
Exemple. Soit $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$ sur $V = \mathbb{R}^2$. Points critiques de f

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

On obtient $(4,2)$ et $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.On a $r = 2, s = -4, t = 6y$. le premier est un minimum local strict et l'autre est un point selle.
Extremums globaux d'une fonction.
Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ et $f\colon A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur A.
Définition*. On dit que f admet en $x \in A$ un minimum (resp. maximum) global si $\forall y \in A, f(y) \geq f(x)$ (resp. $\forall y \in A, f(y) \leq f(x)$) ; on a alors $f(x) = \min_A f = \inf_A f$ (resp. $f(x) = \max_A f = \sup_A f$. Strict si inégalités strictes.
Rappel du théorème de Weierstrass.
Exemples. 1) reprenons la fonction $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$. Pas d'extremum global car $\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = \pm\infty$.
2) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}\sin x$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$. Or $\lim_{n\to\infty} f(\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi) = \pm1$, donc pas d'extremum global.
3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 - (x+y)$. D compact, donc minimum et maximum atteints, par Weierstrass. Sur l'intérieur $\mathring{D}$ le seul point critique est $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, où f vaut $-\frac{1}{2}$. Mais un extremum peut être atteint sur le bord $C = D \setminus \mathring{D}$. $\min_C f = 1 - \sqrt{2}$ et $\max_C f = 1 + \sqrt{2}$.