K. Kurdyka P. Orro : ***Géométrie algébrique et gradient sous -riemannien***

L'objectif de ce cours et de donner quelques résultats sur le comportement des trajectoires du gradient sous-riemannien.
Dans ce cadre l'inégalité de Lojasiewicz n'est pas valide, et une trajectoire du gradient horizontal peut être de longueur infinie, et peut même s'accumuler sur une courbe fermée.

Nous expliquerons que, malgré tout, ces comportements sont exceptionnels : pour une fonction générique les trajectoires de son gradient horizontal ont des propriétés similaires au cas du gradient riemannien.

Pour cela nous donnerons des éléments de géométrie algébrique réelle, puis nous rappellerons les résultats nécessaires sur la généricité. La dernière partie du cours sera consacrée à l'étude des trajectoires génériques.

1. Eléments de la théorie des ensembles semi-algébriques :
Ensembles semi-algébriques : propriétés de base. Théorème de Tarski-Seidenberg.
Décomposition cellullaire semi-algébrique.

2. Propriétés topologiques et métriques.
Théorème de trivialité locale, structure conique
Inégalités de Lojasiewicz

3. Théorèrme de Sard, transversalité à paramètres, généricité des fonctions de Morse.
Rappels de géométrie différentielle. Théorème de Sard.
Lemme de Morse, passage d'un point critique.
Théorème de Thom.

4. Trajectoires du gradient sous-riemannien de fonctions polynomiales.
Structure sous-riemannienne scindée. Gradient horizontal.
Points critiques horizontaux.
Comportement générique des trajectoires du gradient horizontal.

Bibliographie :

M. Hirsch, Differential topology. Springer (1976)
J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy. G´eom´etrie semi-algébrique réelle. Springer (1987)
Subriemannian Geometry. Progress in Mathematics. Vol 144. Birkhäuser (1996)
Gradient horizontal de fonctions polynomiales, Annales de l'institut Fourier, 59 no. 5 (2009)